

基于分数阶导数的苹果果柱蠕变特性研究

潘 嘹¹, 卢立新^{1,2}, 王 军^{1,2}

(1. 江南大学, 无锡 214122; 2. 中国包装总公司食品包装技术与安全重点实验室, 无锡 214122)

摘要: 为了给果品减损包装设计提供理论依据,降低果品在运输过程中的损耗,研究了果品的蠕变特性。以水晶红富士为实验材料,基于分数阶导数理论,建立了苹果果柱蠕变的分数阶 Kelvin 模型。结果表明,分数阶 Kelvin 模型只需要很少的参数,就能够在较长加载历程中表征苹果果柱的蠕变现象。

关键词: 分数阶导数 Kelvin 模型; 苹果果柱; 蠕变

中图分类号: TB485.3; TS206 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-3563(2011)01-0015-03

Creep Properties of Apple Based on Fractional Order Derivative

PAN Liao¹, LU Li-xin^{1,2}, WANG Jun^{1,2}

(1. Jiangnan University, Wuxi 214122, China; 2. Key Laboratory of Food Packaging Techniques and Safety of China National Packaging Corporation, Wuxi 214122, China)

Abstract: The purpose of this research was to reduce damage of fruit during transportation and provide reference for fruit packaging design. Creep test was carried out on crystal red fushi apple. Fractional Kelvin model about the creep state of apple was constructed according to fractional order derivative theory. The result indicated that fractional Kelvin model can characterize the situation of creep of apple for a long period with a few parameters.

Key words: Kelvin model of fractional derivative; apple sample; creep

苹果是我国种植量极大的一种大宗水果,其产量占水果生产的首位,但是在大量规模化生产的同时损耗也极其严重。合理的减损包装设计能够有效减少苹果在运输过程中的损伤。

苹果在运输过程中主要的损伤形式是机械损伤^[1],静载损伤是机械损伤的一种,因此果品的静载力学特性受到国内外专家学者的关注。

对于果品的静态力学性能国内外学者做了许多研究,并建立了力学模型。R. E. Fridley 等以苹果为研究对象分别分析了果实内部的应力分布及果肉切片的力-变形量曲线^[2]。Edward Dintwa 等用流变仪提出了 2 个苹果果实球面接触应力的流变模型^[3]。冯能莲等把苹果描述成一个 4 单元 Burgers 模型,以此来分析苹果在静重载荷作用下的变形与时间关系,发现静重损伤与其所吸收的能量有关,给出了损伤体积 VB 的表达式,并且做了多层苹果互相作用的试验

验证。试验表明在多数情况下该表达式可以正确反应苹果的静载特性,但在大载荷情况下无法正确表达^[4-5]。卢立新基于对梨果实全果肉和带核试样进行等速压缩变形特征,提出了一表征其黏弹塑性的流变模型,模型由 3 个非线性弹簧、1 个滑动阻尼和 1 个黏性阻尼组成^[6]。

在果品静态力学性能中蠕变特性是一项重要的力学特性。张谦益发现在蠕变过程中蠕变载荷的影响大于蠕变时间^[7];李小昱等用 4 单元 Burgers 模型建立了苹果的蠕变模型,发现在保证应力不变的情况下,果柱与整果实验参数很接近^[8]。现有的蠕变模型虽然已经能够较好地描述果品的蠕变过程,但是这些模型往往需要较多的参数,不方便运用。

近年来,以分数阶微积分为理论基础的分数阶导数模型为被广泛运用到机械、土木等多个领域^[9-14]。研究证明,分数阶导数模型只需要非常少的参数就能

收稿日期: 2010-09-29

基金项目: “十一五”国家科技支撑计划课题(2006BAD30B02);江南大学创新团队发展计划资助课题

作者简介: 潘嘹(1986—),男,江苏苏州人,江南大学硕士生,主攻运输包装。

通讯作者: 卢立新(1966—),男,江苏宜兴人,博士,江南大学教授、博士生导师,主要研究方向为包装动力学、包装材料等。

准确描述具有粘弹性特性的物体的力学性能,它的值不单与当前时刻有关,而是与整个加载历程有关。果品作为一个典型的粘弹性物体,目前还没有运用分数阶导数理论分析其力学特性的报道。

1 理论基础

用分数导数理论建立的分数导数型粘弹性本构关系是近几年刚刚发展起来的本构模型,分数导数实际上是 Abel 核函数的 Voherra 型积分。分数阶导数实质上是任意阶的微积分。许多数学家各自从不同角度入手,给分数阶导数分别以不同的定义。其定义的合理性与科学性已在实践中得到验证。在这些定义中以 Riemann—Liouville 定义运用最为广泛^[15],即:

$${}_a^G D_t^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{d^n f}{dt^n} & (\alpha = n \in N) \\ \frac{d^n}{dt^n} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau & (0 \leq n-1 < \alpha < n) \end{cases}$$

分数导数 Kelvin 模型见图 1,由 1 个线性弹簧和

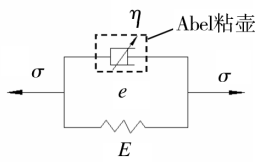


图 1 分数导数 Kelvin 模型

Fig. 1 Kelvin model of fractional derivative

1 个 Abel 粘壶并联组成,其本构关系为^[16]:

$$\sigma(t) = Ee(t) + \eta \tau^{r-1} D^r e(t) = E \tau^r \left(\frac{1}{\tau^r} + D^r \right) e(t) \quad (1)$$

式中: t 为蠕变时间; E 为弹性系数; η 为 Abel 粘壶系数; r 为模型阶数; $\tau = \frac{\eta}{E}$ 。

由(1)式可进一步推导得到分数导数 Kelvin 模型的蠕变柔量^[17]

$$J(t) = \frac{1}{E} \left\{ 1 - E_r \left[- \left(\frac{t}{\tau} \right)^r \right] \right\} \quad (2)$$

式中: $E_r(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma(1+n)}$, Γ 为 Gamma 函数, $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt (x > 0)$; $E_r(x)$ 为无穷级数,当 $|x|$ 较小时,收敛很快, $|x|$ 越大,收敛越慢,在数值计算过程中一般选取截断条件为 10^{-6} ^[18]。

为方便在 Matlab 中用最小二乘法拟合,设(2)式中 $\tau^r = p$, 则 $\tau = \frac{\eta}{E} = \sqrt[r]{p}$ 。

以此模型作为果品的蠕变模型,用最小二乘法拟合模型参数,用以表征果品的蠕变特性。

2 实验

2.1 材料

实验材料是从超市购得的陕西水晶红富士,要求大小均匀,外观齐整无损伤。将样品在室温下放置 24 h,选取硬度范围在 7.0~7.4 的苹果,用采样刀垂直于果蒂方向取直径 18 mm,高 15 mm 的果柱,距表皮至少 2 mm。

2.2 主要仪器及设备

设备:LRX PLUS 万能材料试验机;GY-3 型水果硬度计;果柱采样刀。

2.3 方法

1) 先测量各苹果的硬度,选择所需硬度范围(7.0~7.4)内合适的苹果备用。

2) 将苹果削皮后取样,用万能材料试验机测得苹果果柱的屈服应力。

3) 分别取线性阶段压缩应力的 60%,70%,80% (0.220,0.256 和 0.293 MPa) 3 个载荷,每个载荷下重复 3 次蠕变试验,蠕变时间为 1 h。

3 结果与分析

用最小二乘法拟合数据点,拟合得到模型参数,见表 1。用分数导数 Kelvin 模型表征苹果果柱的蠕

表 1 苹果果柱蠕变模型参数

Tab.1 Model parameters of apple creep

应力水平/%	E	η	r	R^2	RMSE
60	790.1	1.289×10^{10}	0.29	0.991	1.84×10^{-6}
70	909.9	1.566×10^9	0.32	0.996	1.81×10^{-6}
80	1369	1.789×10^8	0.35	0.997	1.88×10^{-6}

变过程,拟合精度高, R^2 均大于 0.99。拟合曲线在蠕变曲线初期与实验数据点能够很好吻合,见图 2。

4 结论

分数阶 Kelvin 模型只需要很少的参数就能够在

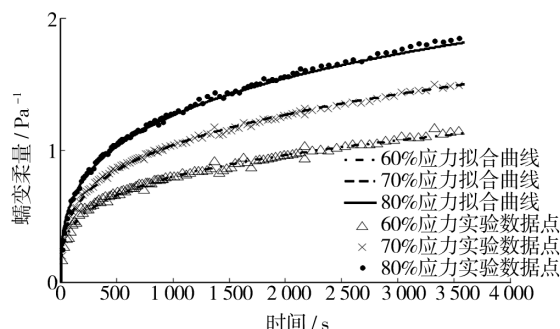


图2 苹果果柱蠕变试验结果与理论模型结果对比

Fig. 2 Test curves of apple samples compared to the result of the model

较长加载历程中准确描述苹果果柱的蠕变现象,适用于描述苹果果柱的蠕变。研究结果为果品蠕变特性的表征提供了一种新的方法和模型,为果品减损包装设计提供了理论基础。

参考文献:

- [1] 卢立新,王志伟. 果品运输中的机械损伤机理及减损包装设计研究进展[J]. 包装工程,2004,25(4):131-134.
- [2] 杨晓清,王春光. 果品静载流变特性的研究进展[J]. 农业工程学报,2005,21(9):178-182.
- [3] DINTWA E, Van ZEEBROECK M, TIJSKENS E, et al. Determination of Parameters of a Tangential Contact Force Model for Viscoelastic Spheroids (fruit) Using a Rheometer Device[J]. Biosystems Engineering, 2005, 91(3):321-327.
- [4] 冯能莲. 苹果在静载作用下的变形规律[J]. 安徽工学院学报,1995,22(2):74-80.
- [5] 冯能莲. 苹果在静载作用下的损伤规律[J]. 安徽工学院学报,1996,23(1):55-58.
- [6] 卢立新,王志伟. 基于准静态压缩的果实黏弹塑性模型[J]. 农业工程学报,2005,21(2):30-33.

- [7] 张谦益,吴洪华. 梨果实蠕变基本流变特性研究[J]. 现代食品科技,2006,22(4):46-48.
- [8] 李小昱,朱俊平. 苹果蠕变特性与静载损伤机理的研究[J]. 西北农业大学学报,1997,25(6):64-68.
- [9] ENELUND Mikael, OLSSON Peter. Damping Described by Fading Memory-analysis and Application to Fractional Derivative Models[J]. International Journal of Solids and Structures, 1999,36:939-970.
- [10] 刘林超,杨骁. 基于分数导数模型的粘弹性桩振动分析[J]. 应用基础与工程科学学报,2009,17(2):303-308.
- [11] ROSSI KHIN Yu A, SHITIKOVA M V. Application of Fractional Operators to the Analysis of Damped Vibrations of Viscoelastic Single-mass Systems[J]. Journal of Sound and Vibration, 1997,199(4):567-586.
- [12] BAGLEY R L, TORVIK P J. A Theoretical Basis for the Application of Fractional Calculus to Viscoelasticity[J]. Journal of Rheology, 1983,27(3):201-210.
- [13] DAVIS G B, KOHANDEL M, SIVALOGANATHAN S, et al. The Constitutive Properties of the Brain Parenchyma Part2. Fractional Derivative Approach[J]. Medical Engineering & Physics, 2005,2006(28):455-459.
- [14] SHAH S Hyder Ali Muttaqi. Unsteady Flows of a Viscoelastic Fluid with the Fractional Burgers' Model[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2010, 11(3):1714-1721.
- [15] 林孔容. 关于分数阶导数的几种不同定义的分析与比较[J]. 闽江学院学报,2003,24(5):3-6.
- [16] 孙海忠,张卫. 分数算子描述的粘弹性材料的本构关系研究[J]. 材料科学与工程学报,2006,24(6):926-930
- [17] KOELLER R C. Applications of Fractional Calculus to the Theory of Viscoelasticity[J]. ASME, 1984,51: 299-307
- [18] 陈宏善,李明明,康永刚,等. Mittag-Leffie 函数及其在粘弹性应力松弛中的应用[J]. 高等学校化学学报,2008,29(6):1271-1275.

(上接第7页)

- [5] 王斌,何德,舒光冀. 泡沫 Al 合金的压缩性能及能量吸收[J]. 金属学报,2000,36(5):1037-1040.
- [6] 胡时胜,刘剑飞,王悟. 硬质聚氨酯泡沫塑料的缓冲吸能特性评估[J]. 爆炸与冲击,1998,18(6):42-47.
- [7] YU Hai-jun, GUO Zhi-qiang, LI Bing, et al. Research into the Effect of Cell Diameter of Aluminum Foam on Its Compressive and Energy Absorption Properties[J]. Materials Science and Engineering, 2007, A454-455(25): 542-546.
- [8] WANG Dong-mei. Impact Behavior and Energy Absorp-

tion of Paper Honeycomb Sandwich Panels[J]. International Journal of Impact Engineering, 2009,36(1):110-114.

- [9] WANG Dong-mei. Energy Absorption Diagrams of Paper Honeycomb Sandwich Structures[J]. Packaging Technology and Science, 2009,22(2):63-67.
- [10] WANG Zhi-wei, E Yu-ping. Mathematical Modeling of Energy Absorption Property for Paper Honeycomb in Various Ambient Humidities[J]. Materials and Design, 2010,31(9):4321-4328.