

异型折叠纸盒数学模型研究

马振国

(青岛科技大学 橡塑材料与工程教育部重点实验室, 青岛 266042)

摘要: 对异型折叠纸盒各体板之间的关系建立了数学模型。建立了相应三维坐标, 并用齐次坐标表示各点位置, 利用各点坐标与转换矩阵相乘的方法推导出了其成型角与纸盒成型后体板折叠角度之间的关系式。该数学模型为计算折叠纸盒的容积、体积和相关缓冲结构及其相关软件开发奠定了基础。

关键词: 折叠纸盒; 折叠角; 齐次坐标; 数学模型

中图分类号: TB482.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-3563(2011)07-0069-03

Study on Mathematic Model of Special-shaped Folding Carton

MA Zhen-guo

(Key Laboratory of Rubber-Plastics, Qingdao University of Science and Technology, Qingdao 266042, China)

Abstract: Mathematic model of special-shaped folding carton was established, which described the relationship among body boards. The relevant 3D coordinates were established and homogeneous coordinates were applied to express the position of points. The relationship between the folding carton's shaped angle and the body boards' folding angle after forming was deduced by multiplying the coordinates of points and transition matrix. This mathematic model can be a foundation to calculate the carton's volume, capacity, relative cushion structure design, and interrelated software development.

Key words: folding carton; folding angle; homogeneous coordinates; mathematic model

文献[1]研究了折叠纸盒结构并对成型角进行了定义, 给出了折叠纸盒旋转角(TULIC-1 公式)。该公式对于已知各成型角的纸盒设计非常有用, 但对某一成型角未知的纸盒来讲, 若旋转角未确定, 则无法对各体板结构进行设计。文献[2-6]分别针对异型纸盒不同特征结构或设计方法进行了研究, 但各体板之间的相互关系及其与纸盒成形后的结构模型均未进行深入研究。

笔者讨论折叠纸盒成型角与成形后体板折叠角度之间的关系, 并建立其数学模型, 以此确定纸盒成型后的体板空间位置, 为纸盒容积、体积计算及相关缓冲结构设计打下理论基础。

1 折叠纸盒成型角与成形后空间结构的关系

任一结构的纸盒, 若平面展开结构已知, 应能确定其成型后的空间结构, 即其体积、容积或其内部缓

冲结构, 应能由已知条件进行相关分析计算得到, 反之亦然。如图 1 所示结构中, 若除①板在 O 点的成形

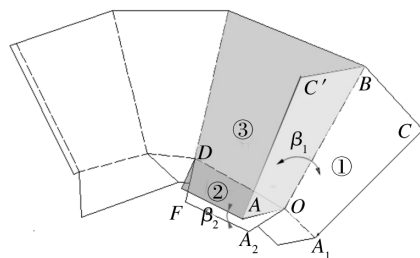


图 1 管式纸盒结构

Fig. 1 Structure of tube carton

角 $\angle A_1OB$ 未定外其它结构已经确定, 则该体板上的成型角或该板裁切边位置应能进行设计计算。

1.1 基本假设

1) 平板折叠假设。假设纸盒在折叠过程中以平板状态折叠, 无曲面变形及翘曲。

2) 假设纸板厚度为无穷小。该假设保证了重叠

收稿日期: 2011-01-06

作者简介: 马振国(1977—), 男, 山东人, 博士生, 青岛科技大学讲师, 主要研究方向为包装结构设计及包装计算机辅助设计。

面设计时纸板可重合于一面。

3) 构成角隅的两不相邻体板边线重合于一线。如图 1 中, OA_1 与 OA_2 线成型后均重合于 OA 。

4) 折叠角概念。设纸板绕旋转轴旋转的角度为折叠角, 用 β_i 表示。

1.2 数学模型建立

在图 1 中, 忽略 OA_1A_2 襟片, 设③板为固定板并将①板、②板沿各自的折叠线进行折叠, 建立异型纸盒的主体结构三维模型。在其盒坯展开平面上建立三维坐标系, 见图 2。通过折叠线对纸盒进行折叠,

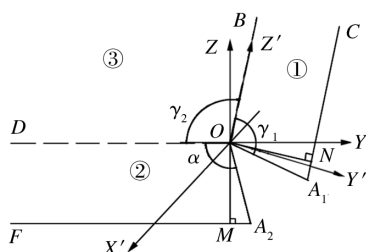


图 2 三维坐标系

Fig. 2 3D coordinates system

则三相邻体板构成空间结构(见图中 O 点所构成的空间角隅)。利用齐次坐标表示 A_1, A_2 点在展开结构中的三维坐标, 并分别将 A_1, A_2 点坐标与相应的转换矩阵相乘, 可得到 A_1'' 点与 A_2' 点坐标。因 A_1, A_2 点在纸盒折叠后重合于 A 点(见图 1), 故 A_1'' 点与 A_2' 点坐标相同, 由此可推导折叠角与成型角之间的关系式。

1.2.1 盒坯展开时 A_1, A_2 坐标

为计算方便, 分别以 O 点为坐标原点建立 XYZ 和 $X'Y'Z'$ 坐标系(见图 2)。其中, XYZ 坐标系 Y 轴与 OD 折叠线方向一致, X 轴垂直于展开平面; 将 XYZ 坐标系绕 X 轴顺时针旋转 $(\gamma_2 - \pi/2)$ 角度以使 Z' 轴过 OB 折叠线并标记为 $X'Y'Z'$ 坐标系。过 O 点做辅助线 $ON \perp A_1C, OM \perp FA_2$ 。因 OA_1 与 OA_2 成盒后重合于 A 点, 故有 $OA_1 = OA_2$, 设其长度为 l 。

A_2 点在 XYZ 坐标系中的坐标为:

$$\begin{cases} x_{A_2} = 0 \\ y_{A_2} = l \sin \angle A_2 OM = l \sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) = -l \cos \alpha \\ z_{A_2} = -l \cos \angle A_2 OM = -l \sin \alpha \end{cases} \quad (1)$$

A_1 点在 $X'Y'Z'$ 坐标系中的坐标位置满足:

$$\begin{cases} x'_{A_1} = 0 \\ y'_{A_1} = l \cos \angle A_1 ON = l \sin \gamma_1 \\ z'_{A_1} = -l \sin \angle A_1 ON = l \cos \gamma_1 \end{cases} \quad (2)$$

1.2.2 ②板折叠后的 A_2' 点坐标

在三维空间中, 任一点 P 可以用世界坐标 (X, Y, Z) 来表达, 其变换后的点 $P'(X', Y', Z')$ 的表达式可与一个 3×3 的变换矩阵 T 的乘积来表示, 即:

$$P' = P \times T = [X' \ Y' \ Z'] \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

用齐次坐标表示法来表示 P 转后的坐标位置 P' , 即用 $P' = [X' \ Y' \ Z' \ 1]$ 来表示 P 点在三维坐标系中的坐标^[7]。利用齐次坐标, 其变换矩阵 T 也相应进行扩展为 4×4 矩阵。故 A_2 点旋转后的坐标可表示为 $A_2' = [X' \ Y' \ Z' \ 1]T$ 。

设②板绕 Y 轴逆时针折叠 β_2 角度, ①板绕其旋转轴 OB 折叠 β_1 后, OA_2 与 OA_1 在空间重合。 A_2 点绕 Y 轴旋转的转换矩阵为:

$$T = R_y = \begin{bmatrix} \cos \beta_2 & 0 & -\sin \beta_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \beta_2 & 0 & \cos \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

将 A_2 点坐标与该矩阵相乘即得到纸盒成型后 A_2' 点坐标:

$$A_2' = [-l \sin \alpha \sin \beta_2 \quad -l \cos \alpha \quad -l \sin \alpha \cos \beta_2 \quad 1] \quad (3)$$

1.2.3 ①板折叠后 A_1'' 点坐标

令①板绕 Z' 轴旋转 β_1 角度, 转换矩阵 R_z 为:

$$R_z = \begin{bmatrix} \cos \beta_1 & \sin \beta_1 & 0 & 0 \\ -\sin \beta_1 & \cos \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

则 A_1' 点在 $X'Y'Z'$ 坐标系中坐标为:

$$A_1' = A_1 R_x = [x_{A_1} \ y_{A_1} \ z_{A_1} \ 1] R_x = [-l \sin \gamma_1 \sin \beta_1 \quad l \sin \gamma_1 \cos \beta_1 \quad l \cos \gamma_1 \quad 1] \quad (4)$$

而 $X'Y'Z'$ 坐标系到 XYZ 坐标系的转换矩阵 R_x 为:

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\frac{\pi}{2} - \gamma_2) & \sin(\frac{\pi}{2} - \gamma_2) & 0 \\ 0 & -\sin(\frac{\pi}{2} - \gamma_2) & \cos(\frac{\pi}{2} - \gamma_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

将 A_1' 坐标在 XYZ 坐标系中表示, 设其为 A_1'' 。

$$A_1'' = A_1' R_x =$$

$$\begin{bmatrix} -l \sin \gamma_1 \sin \beta_1 \\ l \sin \gamma_1 \cos \beta_1 \sin \gamma_2 - l \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 + \\ l \sin \gamma_1 \cos \beta_1 \cos \gamma_2 + l \cos \gamma_1 \sin \gamma_2 \\ 1 \end{bmatrix}^T \quad (5)$$

1.2.4 推导计算

因 A_1 点与 A_2 点在纸盒成型后在空间重合, 故 A_1'' 点与 A_2' 点坐标相同。令式(3)与(5)中各对应坐标相同, 整理得:

$$\sin \gamma_1 \sin \beta_1 = \sin \alpha \sin \beta_2 \quad (6)$$

$$\sin \gamma_1 \cos \beta_1 \sin \gamma_2 - \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 = -\cos \alpha \quad (7)$$

$$\sin \gamma_1 \cos \beta_1 \cos \gamma_2 + \cos \gamma_1 \sin \gamma_2 = -\sin \alpha \cos \beta_2 \quad (8)$$

在该公式的基础上, 若一纸盒成型后结构已知, 可由此计算其成型角; 或由已知成型角, 计算其折叠角 β , 以确定纸盒成型后的容积、体积或内部缓冲结构。

上述数学模型的推导是以管式盒为基础进行的。对盘式盒建立模型, 见图 3^[8], 与图 1 结构相比, 各体

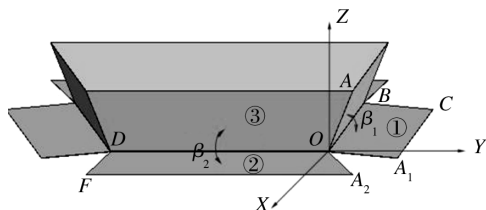


图3 盘式纸盒结构

Fig. 3 Tray carton structure

板相对关系不变, 仅成型角所在位置有所变化。故上述数学模型的推导对管式盒、盘式盒同样适用。

2 分析与讨论

1) 由式(6)可知, 若 $\gamma_1 = \alpha$, 则 $\beta_1 = \beta_2$ 。此结论在端板、侧板 B 成型角相同时可用。若 γ_1, α 确定, 则 β_1 随 β_2 变化而变; 若 β_1, β_2 确定, 则 γ_1 随 α 变化而变。若 γ_1, β_1 确定, 则 α, β_2 存在不确定值, 即 β_2 随 γ_1 变化, 反之亦然。

2) 由式(7)可知, 若成型角唯一确定, 则折叠角也唯一确定。若 β_1 无解, 则纸盒在空间结构上不能折叠, 只能通过曲面结构实现纸盒的成型。进一步分析可得到 β_1, β_2 有如下关系: 若 $\gamma_2 + \gamma_1 = \alpha$, 纸板为对

折, 即只有沿 OA 轴对折不能形成空间结构, 若需要构成空间结构, 则需由曲面变化实现; 若 $\gamma_2 + \gamma_1 < \alpha$, 纸板在三给空间中无相交点, 需由曲面变化来实现; 若 $\gamma_2 + \gamma_1 > \alpha$, 可实现空间结构。

3) 由式(7)知, 当 $\cos \gamma_1 \cos \alpha - \cos \gamma_2 = 0$ 时, $\beta_1 = \pi/2$, 即成型角非 $\pi/2$ 时, 也可出现 $\pi/2$ 折叠角。

4) 若 $\gamma_2 = \gamma_1 = \pi/2$, 由式(1)和(2)可知 $\beta_2 = \pi/2$, $\beta_1 = \alpha$ 。由此可设计梯形盒底结构的纸盒。

3 结论

上述数学模型可用于以下设计或计算: 若一体板结构未确定, 其成型角可由式(1)和(2)计算得到; 计算纸盒各主板自由边线长度; 计算盘式盒成型后边界高度; 计算纸盒的体积或容积, 且对设计纸盒内部空间缓冲结构或外部包装结构非常有用; 为相关纸盒结构设计软件开发提供理论基础。

参考文献:

- [1] 孙诚, 潘松年, 许文才, 等. 包装结构设计[M]. 北京: 中国轻工业出版社, 2010.
- [2] 赵郁聪, 王德忠, 苟进胜. 直四棱台折叠纸盒自锁底成型条件的分析[J]. 包装工程, 2004, 25(4): 161-165.
- [3] 韩炬, 曹利杰. 异型折叠纸盒盒片结构设计方法[J]. 包装工程, 2007, 28(7): 75-81.
- [4] 姜东升, 许文才. 异型折叠纸盒的数学模型设计[J]. 包装工程, 2007, 28(9): 61-62.
- [5] 马振国. 异型纸盒轮廓面展开方法研究[J]. 包装工程, 2010, 31(1): 17-20.
- [6] 韩炬, 曹利杰, 刘寅. 斜线型异型折叠纸盒的角度参数分析[J]. 包装工程, 2010, 31(21): 35-37.
- [7] 蔡汉明, 陈清奎, 杨新华, 等. 机械 CAD/CAM 技术[M]. 北京: 机械工业出版社, 2008.
- [8] MA Zhen-guo. A Study on the Relationship Between Folding Carton's Shaped Angle and Spatial Structure[C]. IA-PRI World Conference on Packaging, Tianjin, 2010: 767-770.