

# 弹性波在蜂窝纸板蜂窝结构中传播的研究

丁毅, 于志慧

(陕西科技大学, 西安 710021)

**摘要:** 通过对弹性波在蜂窝结构中传播的研究, 建立了弹性力学基本方程, 得出了截止频率; 再根据吻合效应产生的频率, 从理论上得出了影响蜂窝结构的隔音因素, 为蜂窝纸板的隔音性研究提供理论依据。

**关键词:** 蜂窝结构; 弹性波; 截止频率; 隔音

**中图分类号:** TB484.1; TB487 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-3563(2011)19-0059-03

## Research of Elastic Wave Propagation in Cellular Structure of Honeycomb Cardboard

DING Yi, YU Zhi-hui

(Shaanxi University of Science & Technology, Xian 710021, China)

**Abstract:** The fundamental equations of elastic mechanics were established through research of the spreading of elastic wave in honeycomb structure. The cut-off frequency was solved from the equations. According to coincidence effect, the sound insulation factors of honeycomb structure were obtained. The purpose was to provide theoretical basis for insulation performance study of honeycomb cardboard.

**Key words:** honeycomb structures; elastic wave; cut-off frequency; sound insulation

蜂窝材料作为一种特殊的多孔结构, 具有良好的抗振隔音性能, 在包装、建筑、航空领域有广泛的应用。近年来, 蜂窝纸板的隔音性得到了特别的关注, 它是一种理想的、很有发展前途的墙体材料, 有很好的性价比, 能减少建筑材料的使用量。包装企业生产的节能环保纸蜂窝复合墙体材料也已用于上海世博会外国展馆区的核心场馆联合国馆的墙体<sup>[1]</sup>。之前对蜂窝纸板的吸声及隔声系数的研究只限于实验测量和分析, 初步了解蜂窝纸板的声学特征<sup>[2]</sup>。文中从弹性波入手, 从理论方面研究影响蜂窝结构隔音的因素。

### 1 波动控制方程和谐波方程的建立

大量的薄壁圆环紧密围绕在一起可以看作是蜂窝结构的理想化。在此用薄壁圆环作为蜂窝结构的理想化模型<sup>[3]</sup>。为了研究形状和体积改变的变形, 可以假想把物体分割成无数个微小的单元, 如果物体中每一个微元变形已知, 可认为整个物体变形就已

知<sup>[4]</sup>。根据铁摩辛柯梁理论, 考虑旋转惯量与剪力, 建立极坐标方程。沿  $R$  方向的切向和径向位移分量分别记为  $u$  和  $v$ ,  $\theta$  为旋转角度, 切向正应力为  $P$ , 径向剪应力为  $Q$ , 弯矩为  $M$ , 见图 1。应用弹性应力应变关系产生以下 6 个弹性力学基本方程<sup>[5]</sup>。

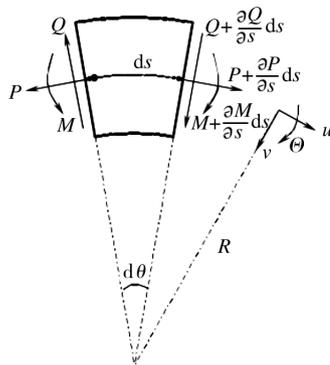


图 1 单位圆环的位移和受力情况

Fig. 1 Displacement and stress of unit circle

$$\frac{\partial P}{\partial s} - \frac{Q}{R} = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

收稿日期: 2011-05-04

作者简介: 丁毅(1953-), 男, 山东日照人, 硕士, 陕西科技大学教授, 主要研究方向为包装工艺及数字包装。

$$\frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{P}{R} = m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial M}{\partial s} + Q = mk^2 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2}$$

$$\begin{cases} \frac{M}{K_b} = \frac{\partial \Theta}{\partial s} \\ \frac{P}{K_e} = \frac{\partial u}{\partial s} - \frac{v}{R} \\ \frac{Q}{K_s} + \Theta = \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{u}{R} \end{cases} \quad (2)$$

其中:  $R$  是径向坐标,  $m$  是沿圆周方向单位长度的质量,  $k$  是质心横截面的回转半径;  $t$  是时间,  $K_b = EI$ ,  $K_e = EA$ ,  $K_s = 5GA/6$ , 分别是环的弯曲、拉伸和剪切刚度;  $E$  和  $G$  是弹性模量和剪切模量,  $A$  是横截面积。

平面简谐波是最简单、最基本也是最重要的一种波。根据迭加原理,任何类型的平面波都可视为简谐平面波的迭加<sup>[6]</sup>,因此,在研究各种类型波之前,往往首先研究它。

波动控制方程(1)和(2)显示出了复杂性,表明波的传播可能是分散的,谐波方程为:

$$\begin{aligned} u &= C_u \exp[i(\eta s - \omega t)], v = C_v \exp[i(\eta s - \omega t)], \\ \Theta &= C_\Theta \exp[i(\eta s - \omega t)] \end{aligned} \quad (3)$$

其中:  $C_u, C_v, C_\Theta$  是振幅;  $\omega$  是角频率;  $\eta$  是波数。波长和相位速度分别为:

$$\lambda = 2\pi/\eta, C_p = \omega/\eta \quad (4)$$

把(2)式代入到(1)式中,消除  $P, Q, M$ , 再加上式(3),得到下面的矩阵方程:

$$\begin{bmatrix} \bar{\eta}^2 + \alpha - \bar{c}_p^2 \bar{\eta}^2 & (1+\alpha)\bar{\eta} & -\alpha\gamma \\ (1+\alpha)\bar{\eta} & \alpha \bar{\eta}^2 + 1 - \bar{c}_p^2 \bar{\eta}^2 & -\alpha\gamma \bar{\eta} \\ -\alpha\gamma & -\alpha\gamma \bar{\eta} & \bar{\eta}^2 + \alpha\gamma^2 - \bar{c}_p^2 \bar{\eta}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_u \\ C_v i \\ kC_\Theta \end{bmatrix} = 0 \quad (5)$$

$$\text{其中: } \alpha = \frac{K_s}{K_e}, \gamma = \frac{R}{k}, \bar{\eta} = R\eta, \bar{c}_p = \frac{c_p}{c_0}, c_0 = \sqrt{E/\rho}。$$

式(5)中的系数矩阵是对称的<sup>[7]</sup>,对于奇异解,系数行列式矩阵必须为零,即:

$$\det \begin{bmatrix} \bar{\eta}^2 + \alpha - \bar{c}_p^2 \bar{\eta}^2 & (1+\alpha)\bar{\eta} & -\alpha\gamma \\ (1+\alpha)\bar{\eta} & \alpha \bar{\eta}^2 + 1 - \bar{c}_p^2 \bar{\eta}^2 & -\alpha\gamma \bar{\eta} \\ -\alpha\gamma & -\alpha\gamma \bar{\eta} & \bar{\eta}^2 + \alpha\gamma^2 - \bar{c}_p^2 \bar{\eta}^2 \end{bmatrix} = 0 \quad (6)$$

得到特征方程为:

$$\begin{aligned} \bar{c}_p^6 &- \left[ 1 + \frac{\bar{\eta}^2 + 1}{\bar{\eta}^2} + \frac{\alpha(\bar{\eta}^2 + 1 + \gamma^2)}{\bar{\eta}^2} \right] \bar{c}_p^4 + \\ &\left\{ \frac{(1+\alpha)(\bar{\eta}^2 + 1)}{\bar{\eta}^2} + \frac{\alpha[(\bar{\eta}^2 - 1)^2 + \gamma^2(\bar{\eta}^2 + 1)]}{\bar{\eta}^4} \right\} \bar{c}_p^2 - \\ &\frac{\alpha(\bar{\eta}^2 - 1)^2}{\bar{\eta}^4} = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

式(7)是弹性波在薄壁圆环里传播的基本理论。就相位速度的平方而言,式(7)是立方;对于一个特定的波数,有3个相位速度与之联系。这意味着3种传播波型,即横波、纵波和弯曲波,相位速度顺序递减。如果波数无限大,即  $\eta \rightarrow \infty$ , 那么  $\bar{\eta} = R\eta \rightarrow \infty$ , 方程式简化为:

$$\bar{c}_p^6 - (2+\alpha)\bar{c}_p^4 + (1+2\alpha)\bar{c}_p^2 - \alpha = 0 \quad (8)$$

$$(\bar{c}_p^2 - 1)^2(\bar{c}_p^2 - \alpha) = 0 \quad (9)$$

3根的结果如下:

$$\bar{c}_p = 1, -1, \sqrt{\alpha} \quad (10)$$

由于考虑的是波正方向的传播速度,所以负根被省略。这3个极限值与波传播的3个基本模式相对应——横波、纵波和弯曲波。

考虑到截止频率,当  $\bar{\eta} \rightarrow 0$  时,式(7)可以转变为一个  $\omega^2$  的三次方程:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\omega R}{c_0} \right)^6 - [2\bar{\eta}^2 + 1 + \alpha(\bar{\eta}^2 + 1 + \gamma^2)] \left( \frac{\omega R}{c_0} \right)^4 + \\ \left\{ (1+\alpha)\bar{\eta}^2(\bar{\eta}^2 + 1) + \alpha[(\bar{\eta}^2 - 1)^2 + \gamma^2(\bar{\eta}^2 + 1)] \right\} \left( \frac{\omega R}{c_0} \right)^2 - \\ \alpha \bar{\eta}^2(\bar{\eta}^2 - 1)^2 = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

当  $\bar{\eta} \rightarrow 0$ , 式(11)简化为:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\omega R}{c_0} \right)^6 - [1 + \alpha(1 + \gamma^2)] \left( \frac{\omega R}{c_0} \right)^4 + \alpha(1 + \gamma^2) \cdot \\ \left( \frac{\omega R}{c_0} \right)^2 = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

解得方程的3个根为:

$$\omega = \frac{c_0}{R} \sqrt{\alpha(1 + \gamma^2)}, \frac{c_0}{R}, 0 \quad (13)$$

因此,有2个有限截止频率相对应2个波模式,即横波  $\sqrt{\alpha(1 + \gamma^2)} c_0/R$  和纵波  $c_0/R$ 。

这意味着低于这些频率,这些波将随着距离的传播而消失,基本上不传播。由于声波属于纵波,故声波的截止频率为:

$$\omega = \frac{c_0}{R} = \frac{\sqrt{E/\rho}}{R} \quad (14)$$

由于弯曲波存在整个频率带上,当声波以某入射角从空气向一隔层传播时,考虑隔层的弹性,会激发隔层内弯曲波的传播,蜂窝纸板会产生受迫弯曲振

动。根据吻合效应,产生吻合效应的频率<sup>[8]</sup>为:

$$f_c = \frac{c^2}{2\pi \sin^2 \theta} \left[ \frac{12\rho(1-\sigma^2)}{Eh^2} \right]^{1/2} \quad (15)$$

式中: $c$ 为自由空气中的声速; $\theta$ 为声波入射角; $\rho$ 为隔层材料的密度; $\sigma$ 为材料泊松比; $E$ 为材料的弹性模量; $h$ 为材料(隔层)厚度。当声波垂直入射时, $f_c \rightarrow \infty$ ,即不产生吻合效应;当声波掠入射时, $\sin \theta \rightarrow 1$ ,得到最低的吻合频率,称临界频率 $f_{c0}$ 。入射声波扩散入射时,在 $f=f_c$ 时,材料的隔声量下降得很多,隔声性能大大降低,应该设法避免<sup>[8]</sup>。

## 2 数值计算

蜂窝纸芯原纸材料的属性如下:弹性模量 $E=4.461 \text{ MPa}$ ,泊松比 $\sigma=0.28$ ,密度 $\rho=666.67 \text{ kg/m}^3$ ,厚度 $h=0.18 \text{ mm}$ ,理想薄壁圆环结构的半径 $R=1.5 \text{ cm}$ , $c=340 \text{ m/s}$ 。将数据代入式(14)和(15)得到声波截止频率 $\omega=5453.43 \text{ Hz}$ ,蜂窝纸芯原纸材料的临界频率 $f_{c0}=4.16 \times 10^6 \text{ Hz}$ 。

人耳可听到的声波频率为 $20 \sim 20000 \text{ Hz}$ ,可知在理想状态下声波截止频率为 $5453.43 \text{ Hz}$ ,故蜂窝结构对人耳可听见的频率在 $20 \sim 5453.43 \text{ Hz}$ 内的声波具有良好的阻隔性;又蜂窝纸芯原纸材料的临界频率约为 $4.16 \times 10^6 \text{ Hz}$ ,故人耳可听见的声波在此不产生弯曲波。

## 3 结语

由式(14)可知声波的截止频率主要和蜂窝结构所用材料的弹性模量 $E$ 、密度 $\rho$ 和蜂窝孔径 $R$ 相关。

$E$ 越大, $\rho$ 越小, $R$ 越小,截止频率越高,故隔音性越好;反之则截止频率较低,隔音性较差。

由公式(15)可知材料的临界频率和材料密度 $\rho$ 、泊松比 $\sigma$ 、弹性模量 $E$ 和材料厚度 $h$ 相关。 $\rho$ 越大、 $\sigma$ 越小、 $E$ 越小、 $h$ 越小,临界频率越高;反之临界频率越低。

通过改变蜂窝结构的材料、蜂窝孔的半径、蜂窝厚度等因素来实现蜂窝结构的隔音和放音性能。对其它薄壁蜂窝结构的研究,例如蜂窝器、多孔材料、泡沫材料,得到的结果可为弹性波在这些材料中传播提供有用的见解。

## 参考文献:

- [1] 叶柏彰. 低碳经济的发展促使纸蜂窝墙体材料前景看好[J]. 中国包装工业, 2010, 5(5): 98-99.
- [2] SHIM V P W, LAN R, GUO Y B, et al. Elastic Wave Propagation in Cellular Systems-experiments on Single Rings and Ring Systems[J]. Int J Impact Eng, 2007, 34(10): 65-84.
- [3] 王晶, 冯涛, 李啸尘, 等. 一种蜂窝纸板材料吸声及隔声系数的实验测量[J]. 包装工程, 2008, 29(12): 54-61.
- [4] 刘喜武. 弹性波场论基础[M]. 青岛: 中国海洋大学出版社, 2008.
- [5] 胡德绥. 弹性波动力学[M]. 北京: 地质出版社, 1989.
- [6] 杨宝俊, 王宝昌, 张伯军. 弹性波理论[M]. 沈阳: 东北师范大学出版社, 1990.
- [7] MORLEY L S D. Elastic Waves in a Naturally Curved Rod[J]. Quart J Mech Appl Math, 1961, 14: 155-172.
- [8] 洪宗辉. 环境噪声控制工程[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002.
- [3] 吴晓, 杨立军. 斜支承弹簧减振系统的固有振动[J]. 空间结构, 2008, 14(4): 50-52.
- [4] 吴晓, 罗佑新, 吴扬. 斜支承弹簧减振系统竖向非线性自振研究[J]. 振动与冲击, 2008, 27(8): 85-87.
- [5] 陈安军. 斜支撑弹簧包装系统非线性振动特性分析[J]. 包装工程, 2009, 30(11): 20-22.
- [6] 武冬雁, 王志伟. 半正弦波冲击时正切型非线性包装系统的冲击响应[J]. 无锡轻工大学学报, 1999, 18(4): 87-90.
- [7] 王军, 王志伟. 半正弦波激励下考虑易损件的正切型包装系统冲击特性研究[J]. 振动与冲击, 2008, 27(1): 167-168.
- [8] WANG Zhi-wei, HU Chang-ying. Shock Spectra and Damage Boundary Curves for Nonlinear Package Cushioning System[J]. Packaging Technology and Science, 1999, 12(5): 207-217.
- [9] 王军, 王志伟. 考虑易损件的正切型包装系统冲击破边界曲面研究[J]. 振动与冲击, 2008, 27(2): 166-167.

(上接第 49 页)