

# 圆形管截面全锥面翻领成型器及其数学模型研究

欧阳焕,周一届,曹海燕,范增良

(江南大学,无锡 214122)

**摘要:**提出了全锥面翻领成型器的基本思想,分析了其优缺点,并对其数学模型进行了详细研究,包括领口交接曲线、肩曲面、边界曲线。在计算机上对所建模型进行了 Pro/E 三维仿真验证。为正确设计圆形管全锥面翻领成型器提供理论依据。

**关键词:**全锥面翻领成型器; 领口交接曲线; 肩曲面; 边界曲线

中图分类号: TB486<sup>+</sup>.02 文献标识码: A 文章编号: 1001-3563(2012)03-0077-04

## Study of Full-cone Shoulder Former of Round Tube Section and Its Mathematical Model

OUYANG Huan, ZHOU Yi-jie, CAO Hai-yan, FAN Zeng-liang

(Jiangnan University, Wuxi 214122, China)

**Abstract:** The idea of full-cone shoulder former was put forward. Its advantages and disadvantages were analyzed. Its mathematical models were particularly studied including intersection curve, shoulder surface and fringe curve. The established mathematical models were validated by Pro/E software on computer. The purpose was to provide theoretical basis to make correct design of full-cone shoulder former of round tube section.

**Key words:** full-cone shoulder former; intersection curve of collar; shoulder surface; fringe curve

翻领成型器是立式制袋充填封口机上袋成型的重要部件,它比其他成型器形状复杂,传统的翻领成型器在设计时先设定一个 T 点,然后建立成型器的领口曲线数学模型,以 T 为顶点,领口曲线为准线,建立肩曲面的数学模型,将其背面设计为平面,再用快速原形技术或其他数字化制造方法制造出来<sup>[1-3]</sup>。

## 1 全锥面翻领成型器特点

全锥面翻领成型器和普通的圆形管截面翻领成型器的原理相似,只是将背平面也变成了锥面(后文中称为背曲面),一个肩曲面和其相邻的半个背曲面位于同一个锥面上。

翻领成型器曲面是可展曲面,它的背平面和肩曲面一般是由一块钢板或其它材料折弯而成。钢板是有厚度的,在折弯的时候,折弯线附近材料表面不可避免地会出现拉伸和压缩变形,特别是背平面翻领成

型器的肩曲面和背平面交接区域材料的变形比较大,从而影响成型器表面成形的精确度,而全锥面翻领成型器可以较好地减小这种影响。在制作有背平面的成型器时,需要在背面进行开槽处理或者预折弯,而制作全锥面翻领成型器时,肩曲面和背曲面的自然成形可以省去这个成形工艺,从而缩短制作时间、提高效率。其不足之处是,用常用方法加工出全锥面翻领成型器后,难以保证成形后的背曲面和肩曲面与建立模型时求得的曲面方程完全吻合。

关于此成型器进料情况和薄膜材料在领口曲线处的受力情况,将在以后进行讨论;由于还未加工出准确的全锥面翻领成型器模型进行实际生产验证,关于拉膜卷曲变形和跑偏等问题仍有待研究。

接下来就翻领成型器的基本模型——圆形料管翻领成型器,阐述全锥面翻领成型器的模型建立方法。此成型器也是左右对称,因此只需研究其一半的曲线曲面数学模型。

收稿日期: 2011-10-10

作者简介: 欧阳焕(1986—),男,湖南长沙人,江南大学硕士生,主攻包装机械。

## 2 全锥面翻领成型器数学模型

### 2.1 领口交接曲线数学模型

建立直角坐标系  $oxyz$  见图 1,  $z$  轴位于圆形料管

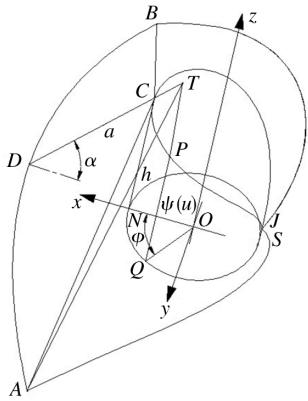


图 1 全锥面翻领成型器立体图

Fig. 1 Graphic model of full-cone shoulder former

的中心线,  $xoz$  平面将料管分为对称的 2 部分, 这里仅具体研究  $y>0$  那一部分<sup>[1,4]</sup>。

在图 1 中, 延长  $DC$  至点  $T$ , 令  $CT=e$ ,  $CN=h$ , 令  $\angle NOQ=\varphi$  ( $\varphi$  为弧度角),  $NQ=u$ ,  $u=\varphi r$ ,  $PT=f$ 。

则  $T$  点坐标为:

$$\begin{cases} x_t = r - e \cos \alpha \\ y_t = 0 \\ z_t = h + e \sin \alpha \end{cases} \quad (1)$$

交接曲线是一条连续曲线, 在其上任取一点  $P$ , 则其坐标为:

$$\begin{cases} x_p = r \cos \varphi \\ y_p = r \sin \varphi \\ z_p = \psi(u) \end{cases} \quad (2)$$

在图 1 中, 由空间两点间距离公式:

$$f^2 = (x_t - x_p)^2 + (y_t - y_p)^2 + (z_t - z_p)^2 \quad (3)$$

代入以上各坐标值则得:

$$f^2 = (r - e \cos \alpha - r \cos \varphi)^2 + r^2 \sin^2 \varphi + [h + e \sin \alpha - \psi(u)]^2 \quad (4)$$

而在展开平面图 2 中, 可得:

$$f^2 = u^2 + [\psi(u) - (h - e)]^2 \quad (5)$$

由于翻领成型器曲面为可展曲面<sup>[1-2]</sup>, 见图 2, 展开前后  $f$  值不变, 故可将上面两式联立, 解出交接曲线上任意点  $P$  的轨迹方程:

$$(r - e \cos \alpha - r \cos \varphi)^2 + r^2 \sin^2 \varphi + [h + e \sin \alpha - \psi(u)]^2 = \varphi^2 r^2 + [\psi(u) - (h - e)]^2 \quad (6)$$

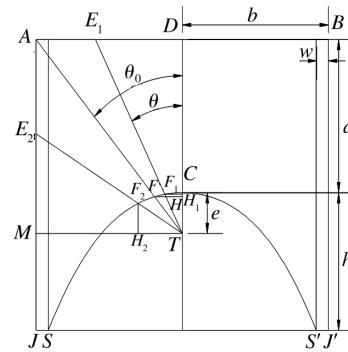


图 2 全锥面翻领成型器展开图

Fig. 2 Developed pattern of the full-cone shoulder former

因此, 领口交接曲线方程为:

$$\psi(u) = h + \frac{r(1 - \cos \varphi)(r - e \cos \alpha) - \frac{1}{2} \varphi^2 r^2}{e(1 + \sin \alpha)} \quad (7)$$

此式的边界条件为:

$$u=0, \psi(u)=h; u=\pi r, \psi(u)=0$$

取后一边界条件, 代入式(7)得:

$$e = \frac{2r^2 - \frac{1}{2}\pi^2 r^2}{2r \cos \alpha - h(1 + \sin \alpha)} \quad (8)$$

### 2.2 背曲面、肩曲面数学模型

仍以背曲面的顶点  $T$  作为肩曲面顶点, 根据此  $T$  点以领口曲线为准线, 扫描形成背曲面与肩曲面, 因此这 2 个面是光滑连接在一起, 其上的点满足同一个曲面方程, 都位于以  $T$  为顶点、以交接曲线为准线的锥曲面上, 且  $AD$  与  $AJ$  是它的边界<sup>[3,5-6]</sup>。

设点  $G(x, y, z)$  为此曲面上任一点, 点  $F_4$  为  $TG$  与领口曲线的交点, 则:

$$\vec{OG} = \vec{OT} + \vec{TG} = \vec{OT} + v \vec{TF}_4 \quad (9)$$

改写这个模型, 即可得此锥曲面方程为:

$$\begin{cases} x = r - e \cos \alpha + (r \cos \varphi - r + e \cos \alpha)v \\ y = v r \sin \varphi \\ z = h + e \sin \alpha + [\psi(u) - h - e \sin \alpha]v \end{cases} \quad (0 \leq \varphi \leq \pi, v \geq 1) \quad (10)$$

### 2.3 边界曲线 $AD$ 的数学模型

在展开图上, 令  $TA$  与领口曲线交点为点  $F$ , 在弧  $CF$  之间任取一点  $F_1$ , 将  $TF_1$  延长至外边界上一点  $E_1$ ,  $TE_1$  与  $TD$  的夹角为  $\theta(\varphi)$ , 点  $E_1$  满足锥曲面方程(10), 设  $E_1$  点坐标为  $(\xi, \eta, \zeta)$ , 则有<sup>[7-8]</sup>:

$$\begin{cases} \xi = r - e \cos \alpha + (r \cos \varphi - r + e \cos \alpha)v_1 \\ \eta = v_1 r \sin \varphi \\ \zeta = h + e \sin \alpha + [\psi(\varphi) - h - e \sin \alpha]v_1 \end{cases} \quad (11)$$

$TE_1$  与  $TD$  的夹角为  $\theta$ , 由几何知识可知:

$$\frac{TH_1}{TD} = \frac{TF_1}{TE_1} = \frac{1}{v_1} \quad (12)$$

$$TH_1 = e - [h - \psi(\varphi)] \quad (13)$$

$$TD = a + e, TE_1 = v_1 TF_1$$

$$v_1 = \frac{a + e}{e - [h - \psi(\varphi)]} \quad (14)$$

$E_1$  与  $A$  重合时, 设  $\angle ATD$  的大小为  $\theta_0$ , 此时对应的  $\varphi$  角为  $\varphi_0$ , 则:

$$\theta_0 = \arctan \frac{b}{a + e} \quad (15)$$

在  $\triangle TFH$  和  $\triangle TAD$  中, 有如下几何关系:

$$\frac{\varphi_0 r}{e - [h - \psi(\varphi_0)]} = \frac{b}{a + e} \quad (16)$$

联立式(7)和式(16)可得  $\varphi_0$  的方程如下:

$$\begin{aligned} & \frac{r\varphi_0^2}{2e(1+\sin\alpha)} + \frac{(a+e)\varphi_0}{b} + \\ & \frac{(r-e\cos\alpha)(\cos\varphi_0-1)}{e(1+\sin\alpha)} - \frac{e}{r} = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

联立式(8)和式(17), 即可在确定好  $a, b, h, r, \alpha$  的值之后, 在 MATLAB 中求得  $\varphi_0$  的具体值, 或者先将  $\cos\varphi_0$  展开成  $\varphi_0$  的幂级数, 然后求出  $\varphi_0$  的具体

$$TH_2 = \sqrt{(r - e\cos\alpha - r\cos\varphi)^2 + r^2\sin^2\varphi + [h + e\sin\alpha - \psi(\varphi)]^2} \sin(\theta_0 + t) \quad (21)$$

$$v_2(\varphi) = (\pi r + w) / \{ \sqrt{(r - e\cos\alpha - r\cos\varphi)^2 + r^2\sin^2\varphi + [h + e\sin\alpha - \psi(\varphi)]^2} \sin(\theta_0 + t) \} \quad (22)$$

$$\text{其中: } t = \cos^{-1} \frac{f^2(\varphi_0) + f^2(\varphi) - r^2(\varphi^2 - \varphi_0^2) - [\psi(\varphi_0) - \psi(\varphi)]^2}{2f(\varphi_0)f(\varphi)} \quad (23)$$

$f$  值可根据式(4)来求。

将  $v_2 = v_2(\varphi)$  代入锥曲面方程( $E$  点坐标方程), 即得边界曲线  $AJ$  的方程:

$$\begin{cases} \xi' = r - e\cos\alpha + (r\cos\varphi - r + e\cos\alpha)v_2(\varphi) \\ \eta' = v_2(\varphi)r\sin\varphi \\ \zeta' = h + e\sin\alpha + [\psi(\varphi) - h - e\sin\alpha]v_2(\varphi) \end{cases} \quad (\varphi_0 \leq \varphi \leq \pi) \quad (24)$$

### 3 全锥面翻领成型器的软件建模验证

用 Pro/E 在计算机上作出的全锥面翻领成型器三维模型见图 3, 其基本参数为:  $r = 50, w = 12, a = 160, h = 160, \alpha = 60^\circ$ 。

图 3 只是模型示意图, 由于加工制作方法和生产要求的不同, 会在封口处和领口处有不同的形状, 而

值。也可以给定一个恰当的  $\varphi_0$  值, 去求出对应的  $e$  值等其他所需的数值。

将式(14)中的  $v_1 = v_1(\varphi)$  代入方程(11)即得边界曲线  $AD$  的方程:

$$\begin{cases} \xi = r - e\cos\alpha + (r\cos\varphi - r + e\cos\alpha)v_1(\varphi) \\ \eta = v_1(\varphi)r\sin\varphi \\ \zeta = h + e\sin\alpha + [\psi(\varphi) - h - e\sin\alpha]v_1(\varphi) \end{cases} \quad (0 \leq \varphi \leq \varphi_0) \quad (18)$$

### 2.4 边界曲线 $AJ$ 的数学模型

展开图中, 在弧  $FS$  之上任取一点  $F_2$ , 且延长  $T_2$  至与边界曲线  $AJ$  交于点  $E_2$ , 令  $TE_2$  与  $TA$  的夹角为  $t$ , 点  $E_2$  满足锥曲面方程式(10), 设  $E_2$  点坐标为  $(\xi', \eta', \zeta')$ , 则有:

$$\begin{cases} \xi' = r - e\cos\alpha + (r\cos\varphi - r + e\cos\alpha)v_2 \\ \eta' = v_2(\varphi)r\sin\varphi \\ \zeta' = h + e\sin\alpha + [\psi(\varphi) - h - e\sin\alpha]v_2 \end{cases} \quad (\varphi_0 \leq \varphi \leq \pi) \quad (19)$$

由几何知识知:

$$v_2 = \frac{TM}{TH_2}, TM = \pi r + w,$$

$$TH_2 = TF_2 \sin(\theta_0 + t) \quad (20)$$

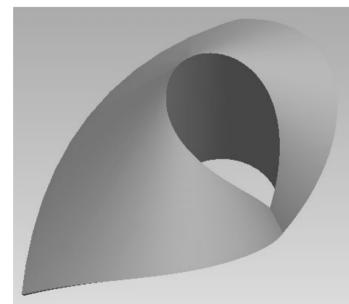


图 3 全锥面翻领成型器三维模型

Fig. 3 Three-dimensional model of the full-cone shoulder former

封口处的形状则要根据实际生产时所需的封口方式进行设计计算、绘图并生产, 圆管底部形状及安装方式可根据安装要求和工作要求来确定。

## 4 结语

1) 全锥面圆形管翻领成型器肩曲面和背面的曲面都是以  $T$  为顶点, 绕领口交接曲线扫描而成的锥面, 背面和锥面共用一个  $T$  点, 且  $T$  点在  $xoz$  平面上, 易确定位置, 并利于接下来的加工。

2) 全锥面翻领成型器的各曲线曲面都可以用数学方程式准确地表达出来, 因此可在计算机上画出二维展开图、建立三维模型图, 进而可用数控加工等现代制造方法来制作。

## 参考文献:

- [1] 许林成. 包装机械原理与设计[M]. 上海: 上海科技出版社, 1988.
- XU Lin-cheng. Principle and Design of Packaging Machinery[M]. Shanghai: Shanghai Science and Technology Press, 1988.
- [2] 周一届, 蔡和平, 储志俊. 矩形管翻领成型器曲面研究[J]. 江南大学学报(自然科学版), 2004, 3(2): 168—172.
- ZHOU Yi-jie, CAI He-ping, CHU Zhi-jun. Study on Surface of the Rectangular Shoulder of Packaging Machines [J]. Journal of Jiangnan University(Natural Science Edition), 2004, 3(2): 168—172.
- [3] 周一届, 储志俊, 蔡和平. 翻领成型器曲面研究[J]. 包装工程, 2004, 25(1): 18—26.
- ZHOU Yi-jie, CHU Zhi-jun, CAI He-ping. Study on Sur-

(上接第 74 页)

- [8] 王涛, 贺炜, 郑晨升, 等. V 带传动带楔入、退出带轮轮槽摩擦损失分析[J]. 设计与研究, 2004(4): 39—41.
- WANG Tao, HE Wei, ZHENG Chen-sheng, et al. Analysis of Power Loss of Belt Drivers Brought by Belt Entering and Exiting the Groove[J]. Modern Machinery, 2004 (4): 39—41.
- [9] LUDEMA K C. Mechanism-based Modeling of Friction and Wear[J]. Wear, 1996, 200: 1—7.
- [10] 朱琳, 刘义翔. 计算 V 带传动当量摩擦系数影响角的研究[J]. 哈尔滨商业大学学报, 2006, 22(1): 102—104.
- ZHU Lin, LIU Yi-xiang. Study On Calculating Influential Angle of Equivalent Friction Coefficient of V-Belt Drive[J]. Journal of Harbin University of Commerce (Natural Sciences Edition), 2006, 22(1): 102—104.
- [11] 朱琳, 郑大宇. 计算 V 带当量摩擦系数的探究[J]. 机械设计与研究, 2008, 24(3): 66—68.

face of the Forming Shoulder[J]. Packaging Engineering, 2004, 25(1): 18—26.

- [4] 林益平, 郝喜海. 翻领成型器领口曲线的设计计算[J]. 轻工机械, 2002(2): 10—12.
- LIN Yi-ping, HAO Xi-hai. Curve Design and Calculation of the Forming Shoulder[J]. Machinery of Light Industry, 2002(2): 10—12.
- [5] 钱晓鸣, 周一届. 椭圆形管翻领成型器的设计[J]. 江南大学学报, 2007, 6(4): 467—469.
- QIAN Xiao-ming, ZHOU Yi-jie. Study on Surface of the Elliptic Shoulder of Packaging Machines[J]. Journal of Jiangnan University, 2007, 6(4): 467—469.
- [6] 钱晓鸣. 翻领成型器研究[D]. 无锡: 江南大学, 2006.
- QIAN Xiao-ming. Study of Forming Shoulder[D]. Wuxi: Jiangnan University, 2006.
- [7] 章辉, 周一届. 矩形管双焦点不对称翻领成型器曲面研究[J]. 包装工程, 2007, 28(2): 19—22.
- ZHANG Hui, ZHOU Yi-jie. Study on the Curved Surface of the Rectangular Double Focus Dissymmetric Shoulder of Packaging Machines[J]. Packaging Engneer, 2007, 28(2): 19—22.
- [8] 章辉. 翻领成型器力学性能研究[D]. 无锡: 江南大学, 2007.
- ZHANG Hui. Study on the Mechanical Properties of Forming Shoulder[D]. Wuxi: Jiangnan University, 2007.
- [9] 苏步青. 微分几何[M]. 北京: 人民教育出版社, 1979.
- SU Bu-qing. Differential Geometry[M]. Beijing: People Education Press, 1979.

ZHU Lin, ZHENG Da-yu. Studies on The Calculation Method for Equivalent Coefficient of V-belt Friction[J]. Machine Design & Research, 2008, 24(3): 66—68.

- [12] 郑大宇, 刘义翔, 陈申, 等. 一种计算 V 带当量摩擦系数的新方法[J]. 中国机械工程, 2004, 15(13): 1157—1159.
- ZHENG Da-yu, LIU Yi-xiang, CHEN Shen, et al. A New Method for Calculating the Equivalent Friction Coefficient of V-belt Drive[J]. China Mechanical Engineering, 2004, 15(13): 1157—1159.
- [13] 姜久红, 朱若燕, 杨明涛. 多列立式袋成型包装机的自动纠偏控制[J]. 包装工程, 2004, 25(4): 187—188.
- JIANG Jiu-hong, ZHU Ruo-yan, YANG Ming-tao. Intelligent Deviation Rectifying Control of the Multi-row-Vertical-forming Packaging Machine[J]. Packaging Engineering, 2004, 25(4): 187—188.