

基于修正单层梁理论的夹层梁最大弯曲正应力计算

吴新风¹, 郝景新^{1,2}, 刘文金^{1,2}

(1. 中南林业科技大学, 长沙 410004; 2. 湖南省家具家饰工业设计中心, 长沙 410004)

摘要: **目的** 计算夹层梁横截面的最大弯曲正应力。**方法** 将夹层梁等效成等截面均质单层梁, 进而推导出了理论计算公式, 并在此基础上进行了三点弯曲试验的算例研究。**结果** 当破坏载荷与夹层梁横截面的尺寸一定时, 随着芯层与总厚度比的增加, 修正单层梁理论计算的最大正应力值逐渐增加, 而单层梁理论计算的结果为恒定值。对于同样结构的夹层梁, 随着芯层弹性模量与表层模量比的增加, 修正单层梁理论计算的最大正应力与单层梁理论的差异值越来越小。**结论** 修正单层梁理论与层合梁理论计算的结果是一致的, 该方法可有效进行最大弯曲正应力的预测与计算。

关键词: 夹层梁; 弯曲正应力; 单层梁理论; 弯曲特性

中图分类号: TB487; TB482

文献标识码: A

文章编号: 1001-3563(2014)01-0069-04

Calculation of Maximum Bending Normal Stress for Sandwich Beam Based on Revised Single Layer Beam Theory

WU Xin-feng¹, HAO Jing-xin^{1,2}, LIU Wen-jin^{1,2}

(1. Central South University of Forestry and Technology, Changsha 410004, China;

2. Hunan I. D. Center of Furniture and Furnishing, Changsha 410004, China)

ABSTRACT: **Objective** To set up maximum bending normal stress equation for sandwich beam. **Methods** New methodology was proposed based on the equivalent single layer beam theory, after that the numerical examples were demonstrated according to three point flexural test. **Results** When the cross section of beam and the maximum loading were fixed, the maximum bending normal stress calculated by Revised single layer beam theory (RSLBT) was increased accordingly with increasing ratio of core thickness to the whole, whereas the calculation result was a constant using the Single layer beam theory (SLBT). In addition, for the same sandwich construction, the difference between RSLBT and SLBT became smaller with increasing ratio of core modulus to the top. **Conclusion** RSLBT, which is equivalent to the Multi-layer beam theory, can provide a new method to calculate the maximum bending normal stress with suitable accuracy.

KEY WORDS: sandwich beam; bending normal stress; single layer beam theory; bending property

各种材料组合的复合层压板广泛应用于航天、军事及民用领域, 其优异的力学性能得到了众多行业的认可。蜂窝夹层板是由上下各一层厚度较薄、刚度较大的材料与刚度较小的蜂窝芯层胶合而成的三层结构的复合层压板, 蜂窝芯可以是纸蜂窝、铝蜂窝等金属蜂窝。基于纸蜂窝芯的木质夹层板具有优异的比

强度、比刚度等性能, 广泛应用于包装行业、家具制造等民用领域^[1-5]。

当夹心结构梁(板)承受弯曲载荷时, 上面板承受压应力, 下面板承受拉应力, 芯板主要承受剪切力。这种结构与工字梁相似, 面板相当于工字梁的翼缘, 芯板相当于工字梁的腹板。随着面板之间夹层厚度

收稿日期: 2013-08-13

基金项目: 湖南省研究生创新基金(CX2012B315); 湖南省教育厅优秀青年(13B151)

作者简介: 吴新风(1982—), 女, 江苏徐州人, 在读博士, 工程师, 主要研究方向为木质复合材料。

的增加,整个剖面的惯性矩呈幂级数增大^[6-9]。最大弯曲正应力是衡量夹层梁弯曲性能的重要参数之一,许多学者经常用传统单层梁理论计算最大弯曲正应力^[10-12]。由于夹层梁由不同材料组成,每一层材料的弹性模量有时差异较大,因此用单层梁理论计算的最大正应力值往往误差很大。由此笔者推导了夹层梁等效弹性模量的表达式,并在此基础上修正了传统单层梁理论计算最大弯曲正应力的公式,最后将不同的计算方法进行对比分析。

1 理论推导

1.1 基于单层梁理论的最大弯曲正应力

基于单层梁理论的最大弯曲正应力公式为:

$$\sigma_b = \frac{3P_{\max}L}{2bh^2} \quad (1)$$

式中: σ_b 为试件的最大弯曲正应力; P_{\max} 为试件破坏载荷; L 为两支座间的距离; b 为试件宽度; h 为试件厚度。

1.2 夹层梁的等效弹性模量

三点弯曲试验的受力分析见图1,根据经典层合梁理论^[13],蜂窝夹层梁的抗弯刚度可表示为:

$$(EI)_{\text{eq}} = \frac{1}{3}b \sum_{k=1}^3 E^{(k)} (z^{(k+1)^3} - z^{(k)^3}) \quad (2)$$

式中: $(EI)_{\text{eq}}$ 为等效抗弯刚度; b 为夹层梁的宽度; $E^{(k)}$ 为第 k 层的弹性模量; $z^{(k+1)}$ 为 $k+1$ 层的 z 轴坐标; $z^{(k)}$ 为 k 层的 z 轴坐标。

由于上下表层板为对称设置,因此式(2)可简化为:

$$(EI)_{\text{eq}} = E_f \times \frac{2b}{3} \left[\left(\frac{h_c}{2} + h_f \right)^3 - \left(\frac{h_c}{2} \right)^3 \right] \times E_c \times \frac{2b}{3} \times \left(\frac{h_c}{2} \right)^3 \quad (3)$$

式中: $E_f = E^{(1)} = E^{(3)}$; $E_c = E^{(2)}$ 。如果将夹层梁等效成相同截面尺寸的均质单层梁,则 I_{eq} 可表示为:

$$I_{\text{eq}} = \frac{bh^3}{12} \quad (4)$$

设 $E_c = k_1 E_f$,并将式(4)代入式(3)中,推出:

$$E_{\text{eq}} \times \frac{bh^3}{12} = E_f \times \frac{2b}{3} \left[\left(\frac{h_c}{2} + h_f \right)^3 + (k_1 - 1) \times \left(\frac{h_c}{2} \right)^3 \right] \quad (5)$$

进一步整理式(5),推出:

$$E_{\text{eq}} = E_f k_2 \quad (6)$$

式中: k_2 为修正系数, $k_2 = 1 + (k_1 - 1) \left(\frac{h_c}{h} \right)^3$; E_{eq} 为夹层梁等效弹性模量; E_f 为表层板弹性模量。

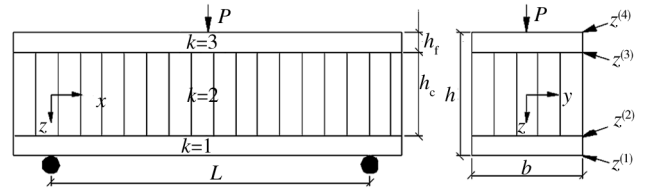


图1 三点弯曲试验的受力分析

Fig.1 Three points bending analysis of sandwich beam

1.3 夹层梁横截面正应力

根据材料力学中的公式^[14],并将夹层板的抗弯刚度进行置换,推出:

$$\begin{cases} \sigma_f = \frac{Mz}{(EI)_{\text{eq}}} E_f, & |z| \geq \frac{h_c}{2} \\ \sigma_c = \frac{Mz}{(EI)_{\text{eq}}} E_c, & |z| \leq \frac{h_c}{2} \end{cases} \quad (7)$$

式中: σ_f 为表层板正应力; M 为横截面弯矩; z 为 z 轴坐标值; E_f 为表层板弹性模量; σ_c 为芯层蜂窝纸正应力; E_c 为芯层弹性模量。

将式(6)代入式(7)中,推出夹层梁横截面任意一点的正应力:

$$\begin{cases} \sigma_f = \frac{Mz}{I_{\text{eq}}} \times \frac{1}{k_2}, & |z| \geq \frac{h_c}{2} \\ \sigma_c = \frac{Mz}{I_{\text{eq}}} \times \frac{k_1}{k_2}, & |z| \leq \frac{h_c}{2} \end{cases} \quad (8)$$

进行夹层梁三点弯曲试验时,加载点处的弯矩可表示为:

$$M = \frac{PL}{4} \quad (9)$$

将式(9)与式(4)代入式(8)中,推出:

$$\begin{cases} \sigma_f = \frac{3PLz}{bh^3} \times \frac{1}{k}, & |z| \geq \frac{h_c}{2} \\ \sigma_c = \frac{3PLz}{bh^3} \times \frac{k_1}{k_2}, & |z| \leq \frac{h_c}{2} \end{cases} \quad (10)$$

当 $z = \pm \frac{h}{2}$, $P = P_{\max}$ 时,推出夹层梁横截面上的最大弯曲正应力为:

$$\sigma_b = \frac{1}{k} \times \frac{3P_{\max}L}{2bh^2} \quad (11)$$

对比式(11)与式(1),发现2种公式的表现形式

一样,只是式(11)多一个调整系数,因此将夹层梁等效成等截面均质单层梁,并用单层梁的理论计算最大弯曲正应力,最后乘以调整系数即可。

2 算例

为了验证修正单层梁理论的有效性,文中引用基于层合梁理论计算最大弯曲正应力的公式作为对比^[15]:

$$\sigma_b = \frac{\left(h_f + \frac{h_c}{2}\right) P_{\max} L E_f}{\frac{4}{3} b \sum_{k=1}^n E^{(k)} (z^{(k+1)^3} - z^{(k)^3})} \quad (12)$$

2.1 算例 1

纸蜂窝芯夹层梁的特点: $E_c \approx 0$ 。设 $P_{\max} = 200 \text{ N}$, $L = 350 \text{ mm}$, h 分别为 20 mm 和 40 mm ,其截面最大正应力见图 2。

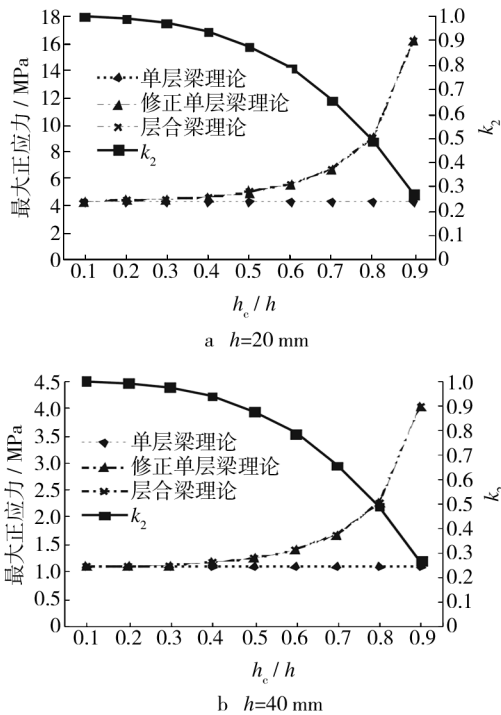


图 2 夹层梁横截面最大正应力

Fig.2 Maximum normal stress of sandwich beam

由图 2 可知,模拟三点弯曲试验时,修正单层梁理论与层合梁理论计算的结果是一致的,这说明修正单层梁理论预测夹层梁最大弯曲正应力是有效的。

当破坏载荷与夹层梁横截面的尺寸一定时,基于单层梁理论计算的最大正应力值是固定的,它与芯层厚度之间并没有直接关系。随着夹层梁芯层与总厚度比的增加,修正单层梁理论计算的最大正应力值逐渐增加。当夹层梁芯层与总厚度比小于 0.3 时,采用修正单层梁理论与单层梁理论所计算的最大正应力差异率小于 3%,即该种结构的夹层梁可直接等效成同截面的均质梁;当芯层与总厚度比为 0.9 时,其最大正应力差异率是芯层与总厚比小于 0.3 时的 3.69 倍。

2.2 算例 2

普通木质夹层梁的特点: $E_c \neq 0$ 。设 $P_{\max} = 200 \text{ N}$, $L = 350 \text{ mm}$, $h = 40 \text{ mm}$, k_1 分别取 0.4 与 0.8,其截面最大正应力见图 3。

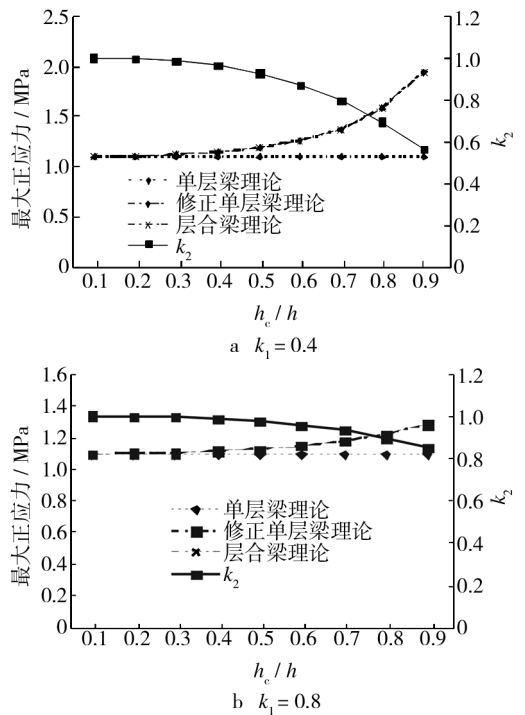


图 3 夹层梁横截面最大正应力

Fig.3 Maximum normal stress of sandwich beam

由图 3 可知,模拟三点弯曲试验时,修正单层梁理论与层合梁理论计算的结果是一致的。对于同样结构的夹层梁,随着芯层模量与表层模量比的增加,修正单层梁理论计算的最大正应力与单层梁理论的差异值越来越小。当芯层模量与表层模量的比为 1 时,2 种理论计算的结果相同,此时夹层梁可视为均质单层梁。

3 结语

建立了将夹层梁等效成等截面均质单层梁计算最大弯曲正应力的方法,并在此基础上进行了算例研究。结果表明,模拟三点弯曲试验时,修正单层梁理论与层合梁理论计算的结果是一致的。当破坏载荷与夹层梁横截面的尺寸一定时,随着芯层与总厚度比的增加,修正单层梁理论计算的最大正应力值逐渐增加,而单层梁理论计算的结果为一恒定值。对于同样结构的夹层梁,随着芯层弹性模量与表层模量比的增加,修正单层梁理论计算的最大正应力与单层梁理论的差异值越来越小。

参考文献:

- [1] GIBSON L J, ASHBY M F. Cellular Solid: Structure and Properties[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
- [2] ALLEN H G. Analysis and Design of Structural Sandwich Panels[M]. Oxford: Pergamon Press, 1969.
- [3] 郝景新, 刘文金, 吴新风. 基于纸质蜂窝的家具板件结构与工艺技术[J]. 包装工程, 2012, 33(22): 29—32.
HAO Jing-xin, LIU Wen-jin, WU Xin-feng. One Furniture Board Structure and Process Technique Based on Paper Honey-comb Core[J]. Packaging Engineering, 2012, 33(22): 29—32.
- [4] 郝景新, 刘文金, 吴新风. V形槽折叠式空心木质腿的结构与工艺[J]. 林产工业, 2012, 39(6): 38—40.
HAO Jing-xin, LIU Wen-jin, WU Xin-feng. One Wooden Leg's Structure and Process Using V Slot Folding Method[J]. China Forest Products Industry, 2012, 39(6): 38—40.
- [5] 郝景新, 吴新风, 刘文金. 考虑剪切变形的蜂窝夹层木质复合梁的弯曲特性[J]. 木材加工机械, 2013(4): 29—33.
HAO Jing-xin, WU Xin-feng, LIU Wen-jin. Bending Performance of Sandwich Beam with Wooden Top and Paper Honey-comb Core[J]. Wood Processing Machinery, 2013(4): 29—33.
- [6] DANIEL I M, ISHAI O. Engineering Mechanics of Composite Materials[M]. New York: Oxford University Press, 2006.
- [7] CARLSSON L A, KARDOMATEAS G A. Structural and Failure Mechanics of Sandwich Composites[M]. New York: Springer Science and Business Media B V, 2011.
- [8] 郝景新, 刘文金, 吴新风. 蜂窝夹层木质复合梁三点弯曲试验的力学特性[J]. 木材加工机械, 2013(5). (余不详)
HAO Jing-xin, LIU Wen-jin, WU Xin-feng. Three Point Bending Property of Sandwich Beam with Wooden Skin and Honey-comb Core[J]. Wood Processing Machinery, 2013(5). (余不详)
- [9] 唐晓雯, 尚新春. 层合梁弯曲正应力的测试与计算[J]. 力学与实践, 2010, 32(4): 77—79.
TANG Xiao-wen, SHANG Xin-chun. Bending Normal Stress Calculation of Multilayer Beam[J]. Mechanics in Engineering, 2010, 32(4): 77—79.
- [10] 徐朝阳, 李大纲. 木质蜂窝夹芯包装材料抗弯性能研究[J]. 包装工程, 2007, 28(8): 16—18.
XU Zhao-yang, LI Da-gang. Bending Properties of the Packaging Material of Sandwich Construction with Wood Facings and Paper Honey-comb Core[J]. Packaging Engineering, 2007, 28(8): 16—18.
- [11] 徐朝阳. 木质复合蜂窝夹芯材料性能研究[D]. 南京: 南京林业大学, 2007.
XU Zhao-yang. Properties of the Composite Material of Sandwich Construction with Wooden Faceplate and a Paper Honey-comb Core[D]. Nanjing: Nanjing Forestry University, 2007.
- [12] 司琳琳, 唐忠荣, 刘林. 新型轻质家具材料—木质材料强化蜂窝芯复合板的研制[J]. 林业机械与木工设备, 2009, 37(1): 12—14.
SI Lin-lin, TANG Zhong-rong, LIU Lin. New Light Furniture Material—development of Composite Board Made of Wooden Material with Enhanced Composite Honeycomb Paper Core[J]. Forestry Machinery & Woodworking Equipment, 2009, 37(1): 12—14.
- [13] 於红梅. 夹层梁纯弯曲正应力理论公式推导与实验分析[J]. 湖北工业大学学报, 2007, 22(2): 54—56.
YU Hong-mei. Experimental Analysis and Academic Formula Deduction of Sandwich Beam Pure Bending Normal Stress[J]. Journal of Hubei University of Technology, 2007, 22(2): 54—56.
- [14] HIBBELER R C, 武建华. 材料力学[M]. 重庆: 重庆大学出版社, 2007.
HIBBELER R C, WU Jian-hua. Mechanics of Materials[M]. Chongqing: Chongqing University Press, 2007.
- [15] 许小君, 李大纲, 周敏. 新型复合夹芯包装材料的弯曲正应力分析[J]. 包装工程, 2003, 24(5): 128—130.
XU Xiao-jun, LI Da-gang, ZHOU Min. Analyzing Mechanical Properties of a New Kind of Composite Laminate Wrapage[J]. Packaging Engineering, 2003, 24(5): 128—130.