

基于解析法的非均匀张力作用下运动薄膜的稳定性

王砚, 田振, 武吉梅, 武秋敏
(西安理工大学, 西安 710048)

摘要: **目的** 针对高速印刷运动薄膜在传输制备过程中由于相邻导纸辊等支撑副的平行度误差, 料膜沿宽度方向张力分布易出现不均匀性问题, 研究提高印刷设备的工作稳定性的方法。**方法** 根据 D'Alembert 原理建立运动薄膜的横向振动微分方程, 引入无量纲量, 将微分方程转化为无量纲形式, 利用解析法求解运动薄膜的复频率方程。**结果** 得到不同参数下无量纲复频率与无量纲速度的变化曲线, 当增大张力系数、张力比, 或者减小长宽比时, 薄膜系统达到发散失稳的临界无量纲速度增大, 运动薄膜系统越稳定。**结论** 获得了在不同张力比、张力系数、长宽比等参数下薄膜系统达到发散失稳的临界无量纲速度。

关键词: 非均匀张力; 印刷运动薄膜; 解析法; 横向振动及稳定性

中图分类号: TS803.6 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-3563(2016)15-0111-05

Stability for Moving Membrane under the Non-uniform Tension Based on Analytical Method

WANG Yan, TIAN Zhen, WU Ji-mei, WU Qiu-min
(Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China)

ABSTRACT: During the preparation of the high-speed moving membrane, due to the parallelism error of adjacent support part such as guide roller, tension of the film is prone to uneven distribution along the width direction. This work aims to study approaches to improve the working stability of printing equipment. The transverse vibration differential equation was derived according to the D'Alembert principle and transformed into dimensionless form by introducing the dimensionless quantity. The calculation of complex frequency equation of an axially moving membrane was done by the analytical method. The curves of the dimensionless frequency with the dimensionless speed under different parameters were obtained. When the tension coefficient and tension ratio were increased or length width ratio was decreased, the critical dimensionless velocity of the membrane system was increased, and the system was more stable. In conclusion, the critical dimensionless velocity of the thin membrane system under different tension ratio, tension coefficient and length width ratio is obtained through the study.

KEY WORDS: non-uniform tension; moving membrane; analytical method; transverse vibration and stability

在印刷机械中, 高速卷筒纸印刷机和凹印机的印刷对象是被张紧的纸张或塑料薄膜, 它们在印刷过程中的振动以及张力的微小变化都会严重影响印刷机的印刷质量和工作平稳性。高速印刷运动薄

膜在传输制备过程中由于相邻导纸辊等支撑副的平行度误差, 料膜沿宽度方向张力分布易出现不均匀性。而印刷机张力控制直接影响着印刷套准精度, 在印刷过程中它不仅影响生产进度, 而且对材料的

收稿日期: 2016-01-11

基金项目: 国家自然科学基金 (11272253); 陕西省自然科学基金 (2014JM7290)

作者简介: 王砚 (1975—), 女, 山西人, 博士, 西安理工大学副教授, 主要研究方向为机械动力学。

浪费也相当严重,在高速卷筒纸印刷机中这一点更为明显。所以,有必要分析非均匀张力下薄膜在运动状态下的振动和稳定性问题。

薄膜的振动尤其是横向振动的研究具有重要应用价值,已引起众多专家、学者的关注。近年来,轴向运动系统的横向振动和稳定性问题的研究已经取得较大的研究成果。陈立群^[1-2]等人分别研究了轴向运动弦线、梁以及薄板的横向非线性振动问题,并且就不同研究对象分析了其稳态响应过程。Nikolay Banichuk^[3]等研究了非均匀张力下运动薄膜的动态特性和不稳定性。Nguyen, Hong^[4-5]分别研究了轴向运动纸带和薄膜在给定速度下的稳定性以及横向振动控制问题。Wu^[6-8]等人研究了加速运动矩形纸带的稳定性问题,确定了纸带的动力不稳定区域和稳定性区域,并讨论了系统参数对不稳定区域的影响。孙逊,张仁杰^[9]基于微小横振动中张力不相等的概念,把张力角度增量与角度之比作为变量,提出了对弦振动和薄膜振动方程进行修正的方法,对弦振动方程与薄膜振动方程进行了探讨。欧阳成^[10]研究了一个具有摄动边界薄膜振动的Robin问题,利用参数变形法及问题的可解性条件,得到了该问题非退化的振动频率与振动模态。李云良^[11-12]等建立了薄膜褶皱分析的力学模型,研究了非线性大变形屈曲薄膜的振动,并在褶皱构形的基础上,进行了考虑大变形效应的模态分析。Kulachenko^[13-14]等对薄膜的非线性动力学行为作了深入的研究,并通过算例进行了计算验证。Shin^[15]等研究了轴向运动薄膜面外振动的动力特性,发现薄膜的固有频率和振动模型受运动速度、边界条件、薄膜张力比以及长宽比的影响。

文中以非均匀张力下的印刷运动薄膜为研究对象,建立运动薄膜的横向振动微分方程,引入无量纲量将微分方程无量纲化,利用解析法给出运动薄膜的复频率计算方程,求解得到不同参数下无量纲复频率与无量纲速度的变化曲线,研究了轴向运动薄膜的非均匀张力系数、张力比、长宽比等参数对薄膜动力特性和稳定性的影响,为提高印刷设备的工作稳定性提供理论依据。

1 振动模型的建立

图1所示为非均匀张力下的轴向运动矩形薄膜,运动速度恒定为 v 。设 $w^*(x, y, t)$ 为薄膜的横向

振动位移; t 为时间; ρ 为薄膜单位面积的质量; T_x 和 T_y 为其在边界上受有的单位长度的拉力; x 和 y 方向长度分别为 a, b ; h 为薄膜的厚度; α 为张力斜率系数。其中 T_x 沿 y 方向变化规律为:

$$T_x = T_0(1 + \alpha \frac{y}{b}) \quad (1)$$

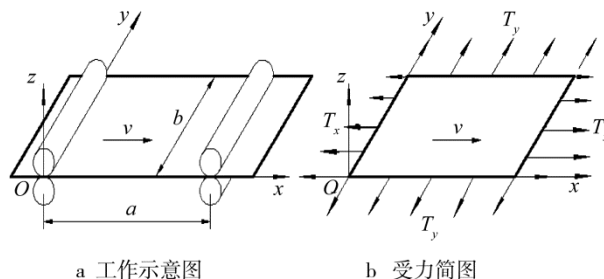


图1 非均匀张力作用下的运动薄膜
Fig.1 Moving membrane under non-uniform tension

假设薄膜在振动时受到一个面密度为 $F(x, y, t)$ 的垂直方向的外力,则由D'Alembert原理得到:

$$\rho(\frac{\partial^2 w^*}{\partial t^2} + 2v\frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial t} + v^2\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2})dxdy = (T_x\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} + T_y\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2})dxdy + F(x, y, t) \quad (2)$$

当 $F=0$ 时,得到轴向运动薄膜的横向振动微分方程为:

$$\rho(\frac{\partial^2 w^*}{\partial t^2} + 2v\frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial t} + v^2\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2}) - T_x\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} - T_y\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} = 0 \quad (3)$$

对方程(3)引入无量纲量:

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b}, \quad w = \frac{w^*}{a}, \quad \tau = t\sqrt{\frac{T_0}{a^2\rho}}, \quad c = v\sqrt{\frac{\rho}{T_0}}, \quad \lambda = \frac{T_y}{T_0}, \quad r = \frac{a}{b} \quad (4)$$

则方程(3)可以转化为无量纲形式:

$$(\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + 2c\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \tau} + c^2\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}) - (1 + \alpha\eta)\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \lambda r^2\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = 0 \quad (5)$$

设(5)的解为: $w(\xi, \eta, \tau) = W(\xi, \eta)e^{j\omega\tau}$ (6)

将式(6)代入式(5)得到运动薄膜的横向振型微分方程

$$(c^2 - 1)\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} - \alpha\eta\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} - \lambda r^2\frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} +$$

$$2cj\omega \frac{\partial W}{\partial \xi} - \omega^2 W = 0 \quad (7)$$

式中: τ 为无量纲时间, $j = \sqrt{-1}$; ω 为无量纲复频率。

印刷运动薄膜边界条件为:

$$\begin{cases} W(\xi, 0) = 0 \\ W(\xi, 1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} W(0, \eta) = 0 \\ W(1, \eta) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

2 解析法求解

如图 2, 轴向运动薄膜在 $\eta=0, \eta=1$ 的 2 条边上支撑, 设振型函数为:

$$W(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(\xi) \sin(i\pi\eta) \quad (9)$$

上式满足边界条件, 即:

$$W(\xi, 0) = 0, W(\xi, 1) = 0 \quad (10)$$

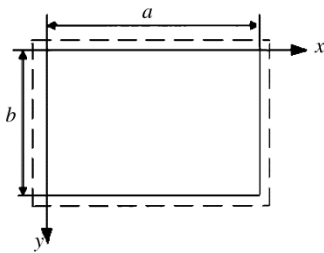


图 2 轴向运动薄膜边界模型

Fig.2 Boundary model of the axial moving membrane

将式(9)代入到(7)得到下列常微分方程:

$$(c^2 - 1 - \alpha\eta) \frac{\partial^2 f_i(\xi)}{\partial \xi^2} + 2cj\omega \frac{\partial f_i(\xi)}{\partial \xi} + (i^2\pi^2\lambda r^2 - \omega^2) f_i(\xi) = 0 \quad (11)$$

式(7)的偏微分方程特征值问题就简化为式(11)的常微分方程特征值问题。

为求频率方程, 可设 $f_i(\xi) = Ae^{s\xi}$ 代入到式(11), 得:

$$(c^2 - 1 - \alpha\eta)s^2 + 2cj\omega s + (i^2\pi^2\lambda r^2 - \omega^2) = 0 \quad (12)$$

由上式解出:

$$s = \frac{-cj\omega \pm \sqrt{(\alpha\eta + 1 - c^2)i^2\pi^2\lambda r^2 - \omega^2}}{c^2 - 1 - \alpha\eta} \quad (13)$$

$$\text{设: } \beta = \frac{\sqrt{(\alpha\eta + 1 - c^2)i^2\pi^2\lambda r^2 - \omega^2}}{c^2 - 1 - \alpha\eta} \quad (14)$$

$$\gamma = \frac{-c\omega}{c^2 - 1 - \alpha\eta} \quad (15)$$

当 $(\alpha\eta + 1 - c^2)i^2\pi^2\lambda r^2 - \omega^2 > 0$ 时, 式(11)的通

解为:

$$f_i(\xi) = C_1 \cosh(\beta\xi) \cos(\gamma\xi) + C_2 \cosh(\beta\xi) \sin(\gamma\xi) \quad (16)$$

当 $(\alpha\eta + 1 - c^2)i^2\pi^2\lambda r^2 - \omega^2 < 0$ 时, 式(11)的通解为:

$$f_i(\xi) = C_3 \cos(\beta\xi) \cos(\gamma\xi) + C_4 \cos(\beta\xi) \sin(\gamma\xi) \quad (17)$$

在式(16)和(17)中, C_i ($i=1, 2, 3, 4$) 是待定常数, 由矩形薄膜另 2 对边 ($\xi=0, 1$) 的边界条件定出。由式(8)知, $\xi=0, \xi=1$ 两边的边界条件为:

$$W|_{\xi=0} = 0, W|_{\xi=1} = 0 \quad (18)$$

将(16), (17)两式代入到(18), 解得轴向运动薄膜横向振动固有振动频率为:

$$\omega = \sqrt{(\alpha\eta + 1 - c^2)i^2\pi^2\lambda r^2 + n^2\pi^2(c^2 - 1 - \alpha\eta)^2} \quad n=1, 2, 3, \dots, \quad (19)$$

3 计算结果及分析

在图 3—4 中, 横坐标均为无量纲速度 c 的值, 纵坐标均为固有振动频率 ω 的值。

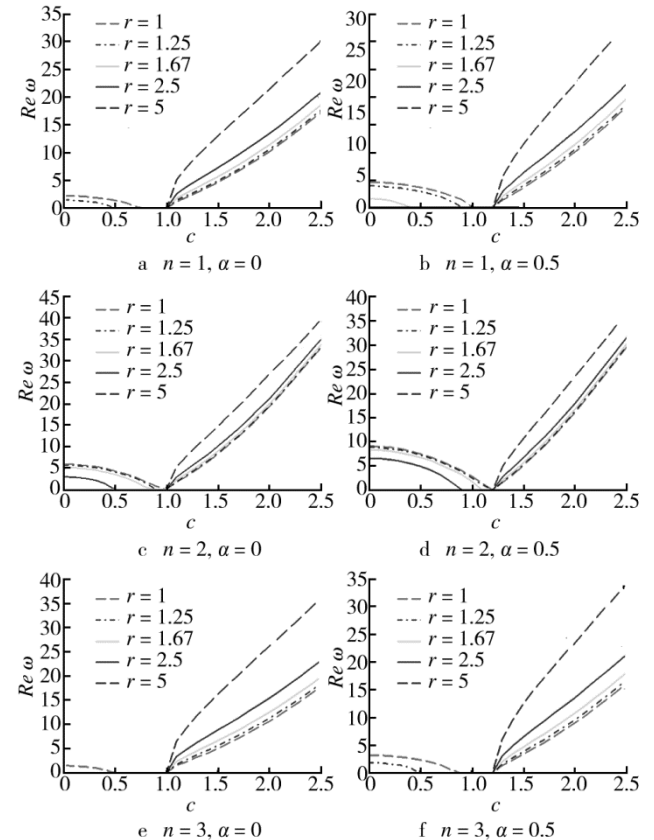


图 3 $\lambda=0.5$ 时无量纲复频率实部与无量纲速度的关系

Fig.3 Dimensionless real part of complex frequency varied with dimensionless velocity at $\lambda=0.5$

图3分别给出了张力斜率 $\alpha=0, \alpha=0.5, \lambda=0.5$ 时, 前3阶 $n=1, 2, 3$ 的无量纲复频率的实部与无量纲速度的关系变化曲线。从每单幅图中, 都可以看出, 随着长宽比 r 的增大, 薄膜系统达到发散失稳的临界无量纲速度逐渐减小。横向分别比较图3, 随着张力系数 α 增大, 薄膜系统达到发散失稳时的临界无量纲速度也随之增大; 纵向比较图3可以看出, 随着阶数 n 的增大, 薄膜系统达到发散失稳的临界无量纲速度逐渐增大。

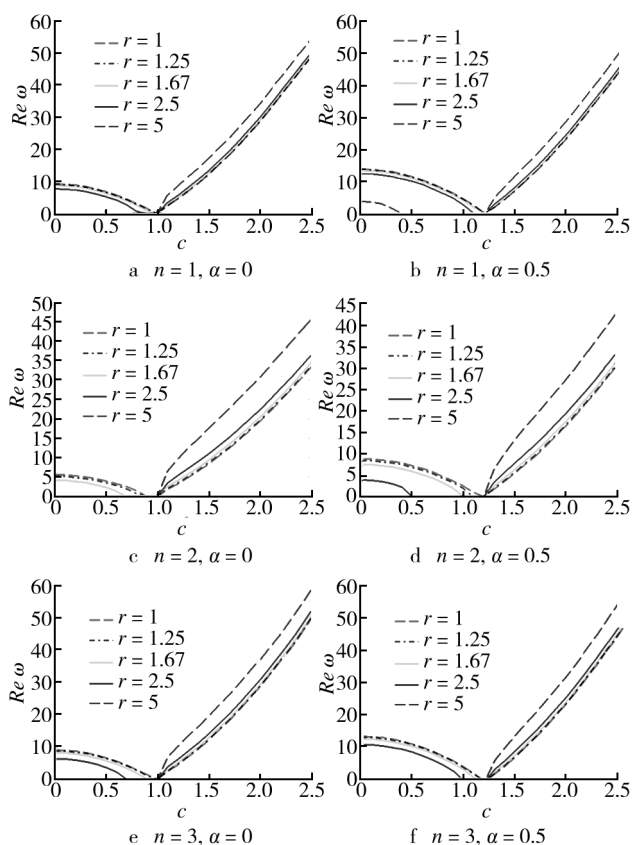


图4 $\lambda=0.8$ 时无量纲复频率实部与无量纲速度的关系
Fig.4 Dimensionless real part of complex frequency varied with dimensionless velocity at $\lambda=0.8$

图4分别给出了张力系数为 $\alpha=0, \alpha=0.5, \lambda=0.8$ 时, 系统前3阶 $n=1, 2, 3$ 的无量纲复频率实部与无量纲速度的关系变化曲线。分别纵向比较图3a, b与图4a, b, 图3c, d与图4c, d, 图3e, f与图4e, f, 可以看出, 随着张力比 λ 的增大, 薄膜系统达到发散失稳的临界无量纲速度逐渐增大。

4 结语

1) 当张力比 λ 、阶数 n 、长宽比 r 相同时, 随着张力系数 α 增大, 薄膜系统达到发散失稳时的临

界无量纲速度也随之增大。

2) 当张力比 λ 、阶数 n 、张力系数 α 相同时, 随着长宽比 r 的增大, 薄膜系统达到发散失稳的临界无量纲速度逐渐减小。

3) 当张力系数 α 、张力比 λ 、长宽比 r 相同时, 随着阶数 n 的增大, 薄膜系统达到发散失稳的临界无量纲速度逐渐增大。

4) 当张力系数 α 、阶数 n 、长宽比 r 相同时, 随着张力比 λ 的增大, 薄膜系统达到发散失稳的临界无量纲速度逐渐增大。

由以上可知, 当增大阶数 n 、张力系数 α 、张力比 λ 或者减小长宽比 r 时, 薄膜系统达到发散失稳的临界无量纲速度增大, 运动薄膜系统越稳定。例如, 当 $n=3$, 张力系数 $\alpha=0$, 张力比 $\lambda=0.8$, 长宽比 $r=1$ 时, 薄膜系统的临界无量纲速度为 $c=1$, 当超过临界速度 $c=1$ 后, 薄膜处于发散失稳状态。当 $n=3$, 张力系数 $\alpha=0.5$, 张力比 $\lambda=0.8$, 长宽比 $r=1$ 时, 薄膜系统的临界无量纲速度为 $c=1.21$, 当超过临界速度 $c=1.21$ 后, 薄膜处于发散失稳状态。

文中采用解析法对非均匀张力下的印刷运动薄膜的振动特性及稳定性进行了研究, 利用D'Alembert原理建立运动薄膜的横向振动微分方程, 利用解析法求解运动薄膜的复频率方程, 研究轴向运动薄膜的张力比、张力斜率系数、长宽比等参数对薄膜动力特性和稳定性的影响, 为提高印刷设备的工作稳定性和结构优化提供理论依据。

参考文献:

- [1] 丁虎, 陈力群. 轴向运动粘弹性梁横向非线性受迫振动[J]. 振动与冲击, 2009, 28(12): 128—131.
DING Hu, CHEN Li-qun. Transverse Non-linear Forced Vibration of Axially Moving Viscoelastic Beam[J]. Journal of Vibration and Shock, 2009, 28(12): 128—131.
- [2] 唐有琦, 陈立群. 面内平动黏弹性板非线性振动的内—外联合共振[J]. 应用数学和力学, 2013, 34(5): 480—487.
TANG You-qi, CHEN Li-qun. Internal-External Combination Resonance of Nonlinear Vibration of in-Plane Translating Viscoelastic Plates[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2013, 34(5): 480—487.
- [3] BANICHUK N, JERONEN J, NEITTAANMÄKI P, et al. Theoretical Study on Travelling Web Dynamics and Instability under Non-homogeneous Tension[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2012, 66(4): 132—140.
- [4] NGUYEN Q C, HONG K S. Stabilization of an Axially

- Moving Web Via Regulation of Axial Velocity[J]. Journal of Sound and Vibration, 2011, 330(20): 4676—4688.
- [5] NGUYEN Q C, HONG K S. Transverse Vibration Control of Axially Moving Membranes by Regulation of Axial Velocity[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2012, 20(4): 1124—1131.
- [6] WU Ji-mei, WU Qiu-min, MA Li-e, et al. Parameter Vibration and Dynamic Stability of the Printing Paper Web with Variable Speed[J]. Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control, 2010, 29(4): 281—291.
- [7] WU Ji-mei, LEI Wen-jiao, WU Qiu-min, et al. Transverse Vibration Characteristics and Stability of a Moving Membrane with Elastic Supports[J]. Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control, 2014, 33(1): 65—77.
- [8] 武吉梅, 王忠民, 武秋敏, 等. 基于微分求积法的变密度印刷纸带振动特性分析[J]. 振动与冲击, 2010, 29(3): 100—102.
WU Ji-mei, WANG Zhong-min, WU Qiu-min, et al. Analysis of Vibration Characteristics of Printing Paper Web with Variable Density Based on Differential Quadrature Method[J]. Journal of Vibration and Shock, 2010, 29(3): 100—102.
- [9] 孙逊, 张仁杰. 对弦振动方程与薄膜振动方程的探讨[J]. 数学的实践与认识, 2010, 40(17): 236—240.
SUN Xun, ZHANG Ren-jie. Study on Vibrating String Equation and Vibrating Thin Film Equation[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2010, 40(17): 236—240.
- [10] 欧阳成. 具有摄动边界薄膜振动 Robin 问题的可解性研究[J]. 数学的实践与认识, 2009, 39(23): 182—186.
OUYANG Cheng. The Solvability Study for a Vibrating Membrane Robin Problem with Perturbed Boundary[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2009, 39(23): 182—186.
- [11] 李云良, 田振辉, 谭惠丰. 屈曲薄膜振动分析[J]. 工程力学, 2008, 25(11): 33—36.
LI Yun-liang, TIAN Zhen-hui, TAN Hui-feng. Vibration Analysis of Buckling Film[J]. Engineering Mechanics, 2008, 25(11): 33—36.
- [12] 李云良, 王长国, 谭惠丰. 褶皱对薄膜振动特性的影响分析[J]. 力学与实践, 2007, 29(6): 17—22.
LI Yun-liang, WANG Chang-guo, TAN Hui-feng. Analysis of Wrinkles' Influences on Membrane's Vibration Characteristics[J]. Mechanics in Engineering, 2007, 29(6): 17—22.
- [13] KULACHENKO A, GRADIN P, KOIVUROVA H. Modeling the Dynamical Behaviour of A Paper Web Part I[J]. Computers and Structures, 2007, 85(1): 131—147.
- [14] KULACHENKO A, GRADIN P, KOIVUROVA H. Modeling the Dynamical Behaviour of A Paper Web Part II[J]. Computers and Structures, 2007, 85(2): 148—157.
- [15] SHIN C, CHUNG J, KIM W. Dynamic Characteristics of the Out-of-plane Vibration for An Axially Moving Membrane[J]. Journal of Sound and Vibration, 2005, 286(4/5): 1019—1031.