

基于 Workbench 研究变位系数对齿轮振动特性的影响

刘学良¹, 翟国栋¹, 梁子豪²

(1.中国矿业大学, 北京 100083; 2.北京航空航天大学, 北京 100191)

摘要: 目的 针对目前某些封口机减速箱中齿轮设计不合理等问题, 提出改善齿轮振动特性的新思路, 改变齿轮的变位系数。方法 通过模态分析来确定机构的固有频率和振型等系数, 以直齿轮的变位系数为自变量, 利用 SolidWorks 进行齿轮三维建模, 将模型导入 Ansys Workbench 中进行模态分析, 最后将得到的数据导入 Matlab 进行分析, 进行多项式拟合。结果 直齿轮的固有频率会随着变位系数的增加而减小, 且在变位系数为 0 处会出现突变, 固有频率随着变位系数的增加在小范围里先减后增, 变化曲线可用十次曲线精确拟合。结论 为研究齿轮固有频率、振型以及对封口机减速箱进行优化设计提供了参考。

关键词: 封口机; 变位系数; 模态分析; 固有频率; 多项式拟合

中图分类号: TH113.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-3563(2016)15-0156-06

Variation Coefficient's Influence on the Vibration Performance of Gear Based on Workbench

LIU Xue-liang¹, ZHAI Guo-dong¹, LIANG Zi-hao²

(1.China University of Mining & Technology, Beijing 100083, China;

2.Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

ABSTRACT: This work aims to present a method of promoting the vibration performance of the gear and change the variation coefficient with respect to some unreasonable designs for gear of reduction gearbox in capper. Natural frequency and vibration mode were confirmed by modal analysis. 3D modeling was conducted by Solidworks with variation coefficient of spur gear as independent variable. Then Ansys Workbench was used to do modal analysis. At last, experiment data were imported into Matlab for analysis and polynomial fitting. The natural frequency of spur gear decreased with the increase of the variation coefficient and had a sudden change when the variation coefficient was zero. It decreased firstly and increased then in a small range with the increase of the variation coefficient. The change curves could be accurately fitted with ten fitting curves. In conclusion, the work can be used as a useful reference for the study of the natural frequency and vibration mode of gear and the optimization design of the reduction gearbox for capper.

KEY WORDS: capper; variation coefficient; modal analysis; natural frequency; polynomial fitting

包装是产品进入流通领域的必要条件, 而实现包装的主要手段是使用包装机械^[1]。包装机械是指能够完成全部或者部分商品包装功能的机械, 其为

大规模生产提供了便利。然而目前包装机械也存在着诸多问题, 比如“封口不牢”机器运行发出‘吱吱’响声”等问题。目前关于封合性能已有诸多研

收稿日期: 2016-03-18

作者简介: 刘学良 (1993—), 男, 河南三门峡人, 中国矿业大学 (北京) 本科生, 主攻机构运动学、机械设计。

通讯作者: 翟国栋 (1973—), 男, 河北高碑店人, 高级工程师, 中国矿业大学 (北京) 机电与信息工程学院副院长, 主要研究方向为机械设计。

究,丁毅等利用 Workbench 的多物理场耦合对奶茶封口机进行了分析^[2]。针对包装机器运行过程中产生振动、发出“吱吱”噪声的问题进行了探讨。齿轮箱的振动、噪声主要来源为齿轮啮合的相互作用^[3]。以 xp-900 型多功能塑料薄膜连续封口机为例,封口机在封口时经常会突然发出“吱吱”的响声,导致封口速度不均等一系列问题。出现该类问题的原因可能是机器损坏或润滑不良、磨损严重等,此外,还有一个很重要的原因就是减速箱齿轮啮合出现问题,减速箱的齿轮振动超过许用范围,导致机器产生额外的噪声,运转不良。研究表明,有 90%~95% 的辐射声能量来自齿轮对啮合产生的啮合声,其通过固体声传至箱体^[4]。针对此类问题,对减速箱中齿轮的设计提出了一条新思路。

如何最大程度的减小振动、改善齿轮的固有特性是减速箱设计中需要反复考虑的问题。齿轮的固有特性包括固有频率、振型等,这些特性会在机构运行中产生动载荷、振动,对机构产生附加的影响。齿轮箱在外部激励和内部激励下会产生复杂的交变应力,产生的振动和变形将会直接影响到传动系统的安全与稳定^[5]。目前来说,改变材料和对齿轮修形已经成为改变齿轮振动特性的重要手段^[6-8],其中,修形应用最为广泛。吴文光、朱如鹏研究了斜齿轮的螺旋角对其固有频率的影响并得出结论^[9],一对啮合的斜齿轮,随着螺旋角 β 的增大,啮合刚度逐渐减小,系统固有频率下降。叶友东、周哲波对两齿差外啮合双联行星传动系统进行模态分析^[10],分析了系统的固有频率和振型。李强等对渐开线圆弧斜齿模型进行模态分析^[11],指出了齿轮的动态特性以及薄弱环节。张立祥等和陈磊等也对齿轮的振动特性有过论述^[12-13]。此外,齿顶修缘也会对齿轮的振动特性产生影响^[14]。张义民等探讨变位系数对齿轮动态传递误差的影响^[15],取主动轮的变位系数为 0.5407, 0.35, 0.2, 0, 得到齿轮副的固有频率分别为 2847, 2811, 2770, 2732。经过分析,认为变位系数会对直齿轮的振动特性有一定影响,因此,文中以直齿轮的变位系数为自变量,研究齿轮变位系数对其固有特性的影响。

1 模态分析简介

有限元分析是研究结构振动特性的重要技术^[16-18]。通过有限元方法进行模态分析可以确定固

有频率、振型等。有限元分析可通过 SolidWorks^[19], Ansys Workbench 等来进行。齿轮系统的运动微分方程为:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F(t)\} \quad (1)$$

式中: $[M]$, $[C]$, $[K]$ 分别为齿轮的质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵; $\{\ddot{x}\}$, $\{\dot{x}\}$, $\{x\}$ 分别为齿轮的加速度向量、速度向量和位移向量。若要得到系统自由振动的模型,只需外力 $\{F(t)\} = 0$ 。忽略阻尼,得到无阻尼自由振动方程:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = 0 \quad (2)$$

其对应的特征方程为:

$$([K] - \omega_i^2 [M])\{\varphi_i\} = 0 \quad (3)$$

式中: ω_i 为振动频率,即第 i 阶的固有频率 φ_i 为相应的特征向量,即第 i 阶的模态振型。

2 三维建模

利用三维绘图软件 SolidWorks 进行齿轮建模。文中研究齿轮变位系数对齿轮振动特性的影响,故只需控制齿轮的变位系数,其他变量严格控制相同。齿轮齿数 $z=25$; 模数 $m=2$; 压力角 $\alpha=20^\circ$; 齿顶高系数 $h_a^*=1$; 齿顶隙系数 $c^*=0.25$; 齿顶过渡圆角半径 $r_a=0.1$ mm; 齿根过渡圆角半径 $r_b=0.76$ mm; 齿宽 $b=120$ mm; 孔径 $d=100$ mm, 再进行齿轮变位系数的选择。实际设计中选择变位系数会考虑是否发生根切和齿轮强度等因素,文中着眼于变位系数对齿轮振动的影响研究,故无需考虑其他因素,取变位系数为 -1, -0.75, -0.50, -0.25, -0.10, 0, 0.10, 0.25, 0.50, 0.75, 1, 再依次对齿轮进行精确的三维建模。

3 Workbench 分析

该研究共有数十次建模及模态分析,限于篇幅,以变位系数为 0.25 的直齿轮为例进行介绍。齿轮的材料选用一致,均为结构钢。

运行 Workbench14.5, 导入模型后,即可进行网格划分。网格的疏密对结果的精度影响很大^[20],随着网格的密集程度增加,计算时间也会相应的增加。较为理想的情况为分析结果不再随网格疏密度的改变而改变,但细化网格不能弥补不准确的假设

和输入引起的错误^[21]。为了分析准确,文中先进行“Generate mesh”,即先粗略的进行四面体网格划分,再设置参数“Relevance”为100,进行“Update”,重新划分网格。接下来进行网格质量评估。网格质量评估标准有:Element Quality, Aspect Ratio, Jacobian Ratio, Skewness等。变位系数为0.25的直齿轮具体评估参数的平均值分别为:Element Quality为0.712, Jacobian Ratio为1.725, Skewness为0.280。Element Quality是基于一个给定的单元体积与边长的比率,其值介于0到1之间,1最好。本次网格划分的Element Quality的平均值为0.712,总体质量较好。Jacobian Ratio是最大值和最小值的比率,1为最理想,越大说明单元越扭曲。Jacobian Ratio的平均值为1.725,符合要求。Skewness是基

本的网格质量检测法,其值处于0到1之间,越小质量越好。Skewness的均值为0.280,符合要求。总的来说,网格划分质量较好。

再进行约束,文中考虑齿轮自由状态下的振动特性,故将齿轮轴面以及键槽两接触面选择为“friction support”即可。模态是系统固有的属性,与外加载荷无关,故无须施加载荷。约束完毕,进行模态分析。

4 实验数据分析

文中选取变位系数为0.25的齿轮分析结果如下,以此来分析各阶固有频率大小及系统对应的振型。

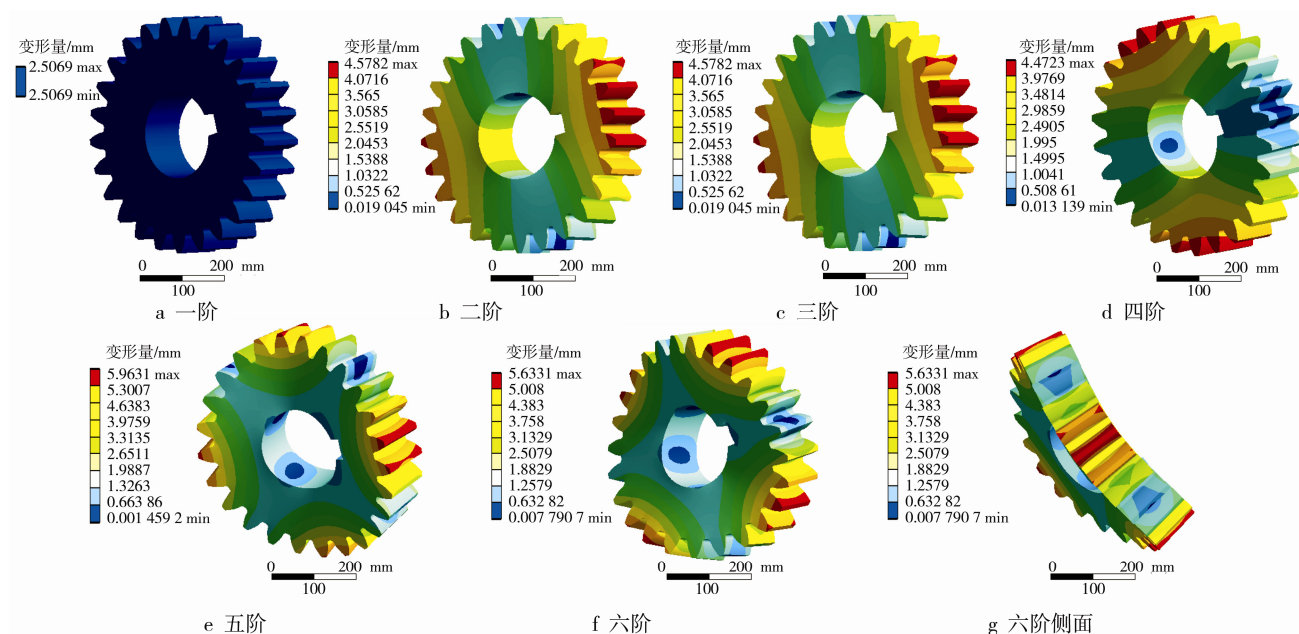


图1 模态分析
Fig.1 Modal analysis

图1a显示一阶振动频率为0,其为齿轮的刚体振动模式,其理论振动频率也应为0。图1b为二阶振动模型,其固有频率824.79 Hz,分析该图可得其为一阶对折振,主要是体现端面上的轴向波浪振动。图1c为三阶振动模型,其频率为971.84 Hz,分析图可得其为频率稍大的一阶对折振,同样是体现在端面上轴向波浪振动。图1d为四阶振动模型,频率为1188.5 Hz,其振型为扭转振动。图1e为五阶振动模型,其频率为2039.1 Hz,分析图可得其

为二阶对折振,同样是体现在端面上的轴向波浪振动。图1f为六阶振动模型,其频率为2141.7 Hz,分析图1f可得其为二阶对折振,是体现在端面上的轴向波浪振动。到六阶振动的时候齿轮的变形已经很大,图1g即为六阶振动齿轮的侧面,从中可以看出其变形已很大。

以上只是变位系数为0.25的具体分析,其他变位系数的分析与其类似,在此不再赘述。不同变位系数在不同模态下的固有频率值见表1。

表 1 不同变位系数不同模态下的固有频率
Tab.1 Natural frequency of different variation coefficients and different models

变位系数	阶数					
	1	2	3	4	5	6
-1	0	977.31	1146.3	1472.4	2484.7	2605.8
-0.75	0.3	894.68	962.94	1144.9	2259.6	2320.8
-0.5	0.87	855.67	920.84	1097.8	2166.5	2224.5
-0.25	0.00026	877.07	1031.6	1283.5	2183.1	2294.6
-0.1	0.21	860.3	1015.5	1258.2	2135.9	2249.1
0	0.0004	772.33	846.82	1004.7	2010.8	2056.7
0.1	0.00025	839.4	989.59	1216.2	2078.3	2184.6
0.25	0	824.79	971.84	1188.5	2039.1	2141.7
0.5	0	802.73	950.3	1155.7	1981.2	2084.2
0.75	0.34	782.74	928.94	1123.1	1929.9	2030.8
1	0	677.12	742.67	886.18	1804.5	1841.61

由表 1 可知，每一个变位系数下的齿轮，其固有频率随着阶数的增加而增加。对于同一阶的不同变位系数的齿轮，其固有频率也存在着一定的变化规律。接下来利用 Matlab 进一步处理数据。

5 利用 Matlab 分析并拟合

由表 1 可知，对于同一阶数的不同变位系数的齿轮，其固有频率也存在着一定的数学关系，可进行多项式拟合。编写并运行十次多项式拟合程序，

结果如下。二阶散点图及十阶多项式拟合方程见图 2a。

其拟合方程为十次多项式，从最高次（10 次）到低次（0 次）的系数均可确定，略去接近为 0 的项，方程为：

$$S=10^6 \cdot (0.8709 x^{10} + 0.0040 x^9 - 1.6432 x^8 - 0.0068 x^7 + 0.9483 x^6 + 0.003 x^5 - 0.1851 x + 0.0095 x^2)$$

(4)

该十次多项式的精度足够高，通过该十次多项式可确定不同变位系数所对应的二阶固有频率。

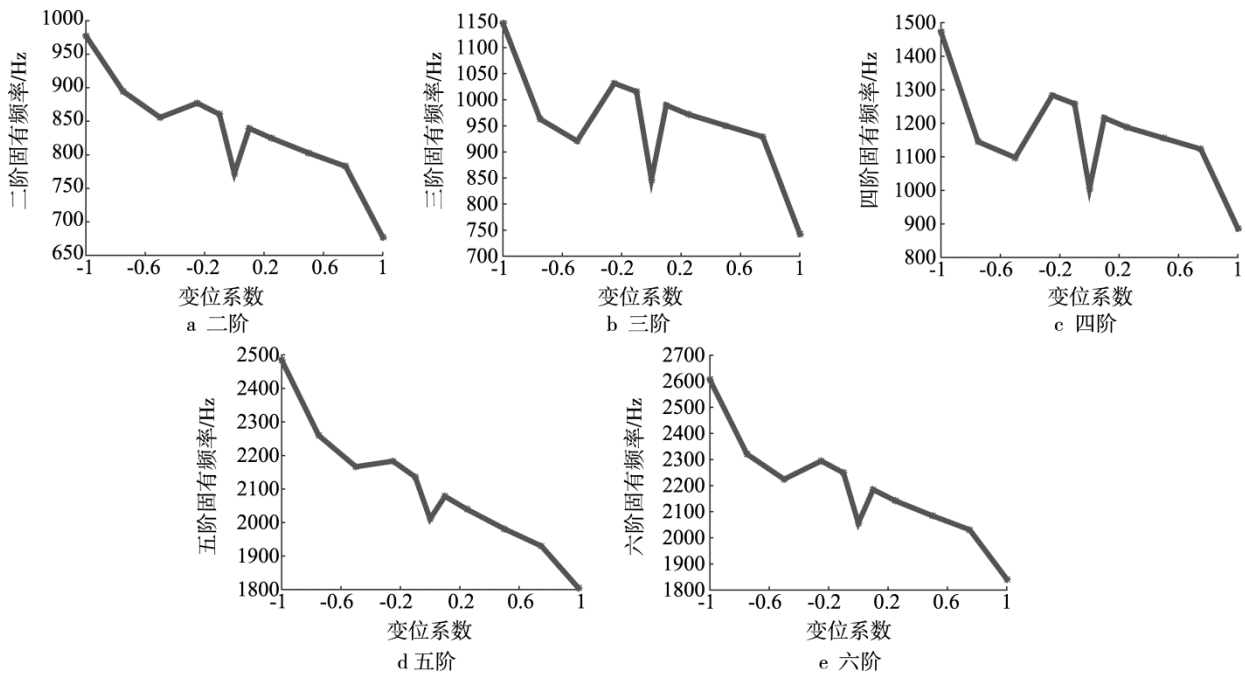


图 2 散点图及十次拟合曲线
Fig.2 Order scatter diagram and its ten fitting curves

同理,三阶散点图及10阶多项式拟合方程见图2b,其拟合方程为:

$$S = 10^6 \cdot (1.7517x^{10} + 0.0098x^9 - 3.3069x^8 - 0.0167x^7 + 1.9092x^6 + 0.0071x^5 - 0.3730x^4 + 0.0191x^2) \quad (5)$$

四阶散点图及10阶多项式拟合方程见图2c,其拟合方程为:

$$S = 10^6 \cdot (2.6123x^{10} + 0.0156x^9 - 4.3918x^8 - 0.0265x^7 + 2.8479x^6 + 0.0112x^5 - 0.5568x^4 + 0.0285x^2) \quad (6)$$

五阶散点图及10阶多项式拟合方程见图2d,其拟合方程为:

$$S = 10^6 \cdot (1.0699x^{10} + 0.0078x^9 - 2.0203x^8 - 0.0134x^7 + 1.1672x^6 + 0.0059x^5 - 0.2284x^4 + 0.0118x^2) \quad (7)$$

六阶散点图及10阶多项式拟合方程见图2e,其拟合方程为:

$$S = 10^6 \cdot (1.7959x^{10} + 0.01x^9 - 3.3904x^8 - 0.017x^7 + 1.958x^6 + 0.007x^5 - 0.3826x^4 + 0.0196x^2) \quad (8)$$

分析结果可得:齿轮做自由振动时,同一阶的固有频率会随着齿轮变位系数的改变而改变,其变化规律可通过十次多项式拟合。从二阶到五阶其变化趋势大体相同,固有频率随着变位系数的增加而不断变化,在区间 $[-1, -0.5]$, $[-0.26, 0]$, $[0.1, 1]$ 内,固有频率随着变位系数的增加而减小;在区间 $(-0.5, -0.26)$, $(0, 0.1)$ 内,固有频率随着变位系数的增加而增加。变位系数0为极值点,也是局部最小值,固有频率与在选用变位系数时应尽量规避。固有频率随着变位系数的增加在小范围里先减后增。同时,在对已经设计好的减速箱施加外加激励时可以通过固有频率的拟合曲线找到齿轮的固有频率,施加激励时避开这些固有频率。

6 结语

针对封口机中某些减速箱设计不合理等状况,提出了改进减速箱齿轮振动特性的新措施—改变齿轮的变位系数。对不同变位系数的直齿轮进行了系统的模态分析,得出了相应的固有频率和振型。利用Matlab对结果进行十次多项式拟合,找出了变化规律:固有频率从二阶到五阶其变化趋势大体相同,会随着变位系数的增加而不断变化,在区间

$[-1, -0.5]$, $[-0.26, 0]$, $[0.1, 1]$ 内,固有频率随着变位系数的增加而减小;在区间 $(-0.5, -0.26)$, $(0, 0.1)$ 内,固有频率随着变位系数的增加而增加。

在减速箱的工程设计中,需要考虑振动频率因素。可以通过改变齿轮的变位系数来改变固有频率,从而改善振动特性,为封口机等包装机的减速箱优化设计提供了新思路。例如,某减速机内一对直齿轮啮合,大小齿轮齿数 $z_1=25$, $z_2=48$;模数 $m=2$;压力角 $\alpha=20^\circ$;齿顶高系数 $h_a^*=1$;齿顶隙系数 $c^*=0.25$ 。在设计之初一般先取变位系数 $x=0$ 。物体的

固有频率 $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$,其中: m 为质量, k 为刚度。

刚度 $k = 4m\pi^2 f_0^2$,即刚度与固有频率呈正相关。当需要配凑中心距时,可对变位系数进行调整。由前面分析可得, $x=0$ 时的固有频率是其邻域内的极小值,可适当增加变位系数,如将变位系数从0增加至0.1,这时二阶固有频率也相应的增加了8.68%,这样在实现配凑中心距的同时增加了齿轮的固有频率,从而提高了齿轮的刚度,增加运行的平稳性;当需要减小结构尺寸时同样可以减小相应的变位系数,例如,从0变为-0.1,二阶固有频率增加了11.39%,同样改善了振动特性。此外,在设计之初要考虑系统外加激励的频率,在设计时可通过改变变位系数来改变齿轮的固有频率,从而使固有频率远离外加激励的频率,提高运行平稳性。

参考文献:

- [1] 颜丹. FR-900 型多功能塑料薄膜连续封口机的设计改进[J]. 福建农机, 2015(1): 43—45.
YAN Dan. The Improve of the FR-900 Multifunctional Plastic Film Continuous Sealing Machine[J]. The Farm Machinery of Fujian, 2015(1): 43—45.
- [2] 丁毅, 苏杰. 基于 Ansys Workbench 的奶茶封口机加热板的多物理场耦合分析[J]. 包装工程, 2012, 33(7): 71—73.
DING Yi, SU Jie. Multi-physical Coupling Analysis of Heating Plate in Milk Tea Capper Based on Ansys Workbench[J]. 2012, 33(7): 71—73.
- [3] 李宏坤, 郭聘, 房世利, 等. 齿轮箱减振降噪优化设计方法研究[J]. 振动与冲击, 2013, 32(17): 150—154.
LI Hong-kun, GUO Cheng, FANG Shi-li, et al. Optimization Design Method for Gearbox's Vibration and Noise Reduction[J]. Journal of Vibration and Shock, 2013, 32(17): 150—154.
- [4] 徐志锋, 邵忍平. 齿轮系统噪声预估及声诊断方法研究[J]. 计算机测量与控制, 2009, 17(9): 1688—1691.

- XU Zhi-feng, SHAO Ren-ping. Forecast of sound Pressure Level of Gear Systems and Fault Diagnosis Based on Acoustics[J]. Computer Measurement & Control, 2009, 17(9): 1688—1691.
- [5] 黄冠华, 王兴宇, 梅桂明, 等. 内外激励下高速列车齿轮箱箱体动态响应分析[J]. 机械工程学报, 2015, 51(6): 95—100.
- HUANG Guan-hua, WANG Xing-yu, MEI Gui-ming, et al. Dynamic Response Analysis of Gearbox Housing System Subjected to Internal and External Excitation in High-speed Train[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2015, 51(6): 95—100.
- [6] 段福海, 胡青春, 谢存禧. 钢/塑齿轮组合行星传动的振动特性[J]. 机械工程学报, 2010, 46(1): 62—67.
- DUAN Fu-hai, HU Qing-chun, XIE Cun-xi. Dynamic Behavior for Planetary Geared System with Plastic Gear[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2010, 46(1): 62—67.
- [7] 陈思雨, 唐进元, 王志伟, 等. 修形对齿轮系统动力学特性的影响规律[J]. 机械工程学报, 2014, 50(13): 59—65.
- CHEN Si-yu, TANG Jin-yuan, WANG Zhi-wei, et al. Effect of Modification on Dynamic Characteristics of Gear Transmissions System[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2014, 50(13): 59—65.
- [8] WANG Q, HU P, ZHANG Y. A Model to Determine Mesh Characteristics in a Gear Pair with Tooth Profile Error[J]. Advances in Mechanical Engineering, 2014, 2014: 1—10.
- [9] 吴文光, 朱如鹏. 基于 Workbench 的斜齿轮固有特性分析[J]. 机械传动, 2010, 34(4): 54—56.
- WU Wen-guang, ZHU Ru-peng. Analysis on Natural Vibration Characteristics of Helical Gear Based on Workbench[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2010, 34(4): 54—56.
- [10] 叶友东, 周哲波. 基于 ANSYS 直齿圆柱齿轮有限元模态分析[J]. 机械传动, 2006, 30(5): 63—65.
- YE You-dong, ZHOU Zhe-bo. Analysis on Finite Element Modal of Straight Spur Gear Based on ANSYS[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2006, 30(5): 63—65.
- [11] 李强, 何家宁, 张伟. 基于 Pro/E 和 ANSYS 的渐开线圆弧齿轮模态分析[J]. 科学技术与工程, 2011, 11(19): 4445—4448.
- LI Qiang, HE Jia-ning, ZHANG Wei. Involute-circular Tooth Gear Model Analysis Based on Pro/E and ANSYS[J]. Science Technology and Engineering, 2011, 11(19): 4445—4448.
- [12] 张立祥, 詹少华, 金梅, 等. 基于 Pro/E 和 ANSYS 的变速箱斜齿轮的参数化精确建模及模态分析[J]. 煤矿机械, 2011, 32(4): 108—110.
- ZHANG Li-xiang, ZHAN Shao-hua, JIN Mei, et al. Precision Parametric Modeling and Modal Analysis of Helical Gear in Transmission Based on Pro/E and ANSYS[J]. Coal Mine Machinery, 2011, 32(4): 108—110.
- [13] 陈磊, 罗善明, 王建, 等. 余弦齿轮的有限元模态分析[J]. 机械传动, 2009, 33(3): 7—10.
- CHEN Lei, LUO Shan-ming, WANG Jian, et al. Finite Element Modal Analysis of Cosine Gear[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2009, 33(3): 7—10.
- [14] 马辉, 逢旭, 宋溶泽, 等. 考虑齿顶修缘的齿轮-转子系统振动响应分析[J]. 机械工程学报, 2014, 50(7): 39—45.
- MA Hui, PANG Xu, SONG Rong-ze, et al. Vibration Response Analysis of A Geared Rotor System Considering the Tip Relief[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2014, 50(7): 39—45.
- [15] 张义民, 杨健, 胡鹏, 等. 考虑变位系数的直齿轮啮合特性分析[J]. 东北大学学报(自然科学版), 2013, 34(9): 1288—1291.
- ZHANG Yi-min, YANG Jian, HU Peng, et al. Meshing Characteristics Analysis of Spur Gear Pair Considering Modification Coefficient[J]. Journal of Northeastern University(Natural Science), 2013, 34(9): 1288—1291.
- [16] 王睿娜, 卢立新, 余渡元, 等. 折叠式托盘箱货架弯曲的有限元分析及试验验证[J]. 包装工程, 2014, 35(7): 34—38.
- WANG Rui-na, LU Li-xin, YU Du-yuan, et al. Finite Element Analysis and Test Validation of Racking Bending in Folding Box Pallet[J]. Packaging Engineering, 2014, 35(7): 34—38.
- [17] 吴斌方, 熊华, 张静, 等. 基于有限元分析的瓦楞机支撑侧板结构优化设计[J]. 包装工程, 2014, 35(5): 62—66.
- WU Bin-fang, XIONG Hua, ZHANG Jing, et al. Structural Optimization of Supporting Panel for Corrugators Based on Finite Element Analysis[J]. Packaging Engineering, 2014, 35(5): 62—66.
- [18] 张涛, 王建军, 吴勇军. 基于接触有限元的齿轮—转子系统动态特性分析[J]. 机械工程学报, 2014, 51(19): 40—46.
- ZHANG Tao, WANG Jian-jun, WU Yong-jun. Dynamic Characteristics Study of Geared Rotor System Using Contact Finite Element Analysis Method[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2014, 51(19): 40—46.
- [19] 苗红涛. 基于 Solid Works 的中空塑料包装容器耐内压强度有限元分析[J]. 包装工程, 2016, 37(1): 74—77.
- MIAO Hong-tao. Finite Element Analysis of Compressive Strength of Hollow Plastic Packaging Containers Based on Solid Works[J]. Packaging Engineering, 2016, 37(1): 74—77.
- [20] 李吉成, 果霖, 朱景林, 等. 基于 ANSYS Workbench 小麦脱粒机离心风机叶轮有限元分析[J]. 云南农业大学学报, 2015, 30(6): 951—957.
- LI Ji-cheng, GUO Lin, ZHU Jing-lin, et al. Finite Element Analysis on Wheat Thresher's Centrifugal Fan Impeller Based on ANSYS Workbench[J]. Journal of Yunnan Agricultural University, 2015, 30(6): 951—957.
- [21] 丁欣硕, 凌桂龙. ANSYS Workbench 14.5 有限元分析案例详解[M]. 清华大学出版社, 2014.
- DING Xin-shuo, LING Gui-long. Finite Element Analysis of Detailed Cases on ANSYS Workbench 14.5[M]. Tsinghua University Press, 2014.