

包装机械

RPR/RRPR 球面并联机构的建模与工作空间分析

梁世杰, 李瑞琴, 孟宏伟, 苗智英, 朱佳博

(中北大学, 太原 030051)

摘要: **目的** 提出一种 RPR/RRPR 球面并联机构, 用于球面外包装的喷绘和雕刻。**方法** 对 RPR/RRPR 球面并联机构进行数学模型的建立, 分析机构的正运动学和逆运动学解。根据运动学分析, 使用 Matlab 和 SolidWorks 软件分别绘制机构 2 支链支撑杆在不同夹角下机构参考点的可达工作空间, 并分析可达工作空间的变化规律。**结果** RPR/RRPR 球面并联机构在一个对称的可达空间内, 可达工作空间的面积随 2 支链支撑杆的夹角的增大而增大。**结论** RPR/RRPR 球面并联机构用于球面外包装的喷绘与雕刻, 结构简单且运动性能良好, 具有较大的工作空间, 可以提高球面外包装喷绘和雕刻工序的效率。

关键词: RPR/RRPR; 球面并联机构; 运动学分析; 工作空间

中图分类号: TB486; TS206 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-3563(2017)23-0128-05

Modeling and Workspace Analysis of RPR/RRPR Spherical Parallel Mechanism

LIANG Shi-jie, LI Rui-qin, MENG Hong-wei, MIAO Zhi-ying, ZHU Jia-bo
(North University of China, Taiyuan 030051, China)

ABSTRACT: The work aims to propose a RPR/RRPR spherical parallel mechanism, which can be used for inkjet printing and engraving of spherical outer package. The mathematical model of RPR/RRPR spherical parallel mechanism was established. The solutions to forward kinematics and inverse kinematics of the mechanism were analyzed. According to the kinematic analysis, Matlab and SolidWorks were respectively used to draw the reachable workspace of the reference points of the mechanism when its two branched chain supporting rod was under different angles, and the change law of the reachable workspace was analyzed. The results showed that the RPR/RRPR spherical parallel mechanism was in a symmetric reachable workspace, and the area of reachable workspace was increased with the increase in the angle of the two branched chain supporting rod. RPR/RRPR spherical parallel mechanism is used for inkjet printing and engraving of the spherical outer package. The structure is simple and has good working performance and a larger workspace, which can improve the efficiency of inkjet printing and engraving process of the spherical outer package.

KEY WORDS: RPR/RRPR; spherical parallel mechanism; kinematic analysis; workspace

并联机构具有刚度大、结构紧凑、精度高且累计误差小等优点^[1]。球面并联机构是并联机构的一个分支, 由于其各运动副中心轴线汇交于一点, 因此球面并联机构具有较好的灵活性^[2], 因此可将球面并联机构应用于球面外包装的喷绘和雕刻。少自由度的球面并联机构具有工作空间大, 机构简单, 驱动数目少等优点^[3]。工作空间是机器人的一项重要技术指标, 其空间位置求解是研究机器人工作空间的重要部分。周

玉林等^[4]采用正交变换的方法分析了 3-RRR 球面并联机构的静刚度问题。王超群等^[5]采用哈密顿“四元数”建立了 3-RRR 球面并联机构的逆运动学数学模型并求得可达工作空间。赵建文等^[6]采用封闭法^[7]研究 2-RPR+RRP 球面混联机构的可达工作空间。李大海等^[8]使用螺旋理论分析了 3-RRS 球面并联机构的工作空间。随磊^[9]研究了 3-RPR 球面并联机构的运动性能。Wu Guanglei 等^[10]研究了不对称 3-DOF 球面并联

收稿日期: 2017-06-10

基金项目: 国家自然科学基金 (51275486); 山西省研究生创新项目 (2017SY071)。

作者简介: 梁世杰 (1991—), 男, 中北大学硕士生, 主攻机构创新与机器人装备方向。

通讯作者: 李瑞琴 (1964—), 女, 中北大学教授、博导, 主要研究方向为机构理论与复杂机械系统。

机械手的运动学及刚度性能。Houssem Saafi 等^[11]研究了冗余 3-RRR 球面并联机械手的最佳扭矩分配问题。QU Yunxia 等^[12]使用无量纲设计了一种 2-DOF 球面并联机构,并给出了描述速度性能指标的方法。Javad Enferadi 等^[13]分析了 3-RRP 球面并联机构的逆运动学解及 workspace。杨勇智等^[14]对一种两自由度球面并联机构进行了运动学和动力学研究。

1 RPR/RRPR 球面并联机构的建模

1.1 RPR/RRPR 球面并联机构的结构

RPR/RRPR 球面并联机构由固定支撑杆 l_1 、支撑杆 l_2 、驱动杆 l_3 和 l_4 、圆弧导轨 l_5 和 l_6 组成,见图 1。按从下往上的顺序, l_1, l_3, l_5 构成 R, P, R 的第 1 支链, l_2, l_4, l_6 构成一个 R, R, P, R 的第 2 支链,其中 R 表示转动副, P 表示移动副。A 为第 2 支链第 1 转动副运动中心, B_1 为第 1 支链第 1 转动副的运动中心, B_2 为第 2 支链第 2 转动副的运动中心, C_1 和 C_2 分别为圆弧杆 l_5 和 l_6 的中点, E 为第 1 支链第 2 转动副和第 2 支链第 3 转动副的运动中心, O 为各运动副中心轴线的交点。

1.2 RPR/RRPR 球面并联机构的建模与自由度分析

β_i 为 OB_i 与水平面的夹角, β 的大小和机构的尺寸有关,见图 1。矢量 e 为球心 O 到 E 点方向上的单位矢量, r_i 为球心 O 到 B_i 方向上的单位向量, v 为

$${}^D_R = \begin{bmatrix} \cos \varphi_z \cos \theta_y \cos \psi_z - \sin \varphi_z \sin \psi_z & -\cos \varphi_z \cos \theta_y \sin \psi_z - \sin \varphi_z \cos \psi_z & \cos \varphi_z \sin \theta_y \\ \sin \varphi_z \cos \theta_y \cos \psi_z + \cos \varphi_z \sin \psi_z & -\sin \varphi_z \cos \theta_y \sin \psi_z + \cos \varphi_z \cos \psi_z & \sin \varphi_z \sin \theta_y \\ -\sin \theta_y \cos \psi_z & \sin \theta_y \sin \psi_z & \cos \theta_y \end{bmatrix} \quad (1)$$

使用修正的 Kuzbach-Grübler 公式计算机构的自由度:

$$M = d(n - g - 1) + \sum_{i=1}^g f_i + v - \xi \quad (2)$$

球面并联机构的 $d=3$, 没有公共约束, 没有局部自由度, $n=6, g=6$, 算得机构的自由度为 3。其中 B_1 与 B_2 处分别为机构的第 1、第 2 驱动, A 点处为机构的第 3 驱动。

2 运动学分析

2.1 位姿逆解

机构的初始位置见图 1, 此时 A, B_1 , C_1 , E 共面, A, B_2 , C_2 , E 共面, 且面 AB_1C_1E 与面 AB_2C_2E 垂直。已知机构的输出参数 φ, θ, ψ , 求第 1 驱动的转角 γ_1 , 第 2 驱动的转角 γ_2 以及第 3 驱动的转角 γ_3 。动坐标系的 z 轴沿矢量 e 方向, r_1 矢量与机构尺寸有关, v 是沿动坐标系 z 轴方向的单位矢量, 因此矢量 e, r_1, v 可以表示为 ${}^D_e = [0 \ 0 \ 1]^T, {}^O_r1 = [\cos \beta_1 \ 0 \ -\sin \beta_1]^T, {}^O_v = [0 \ 0 \ 1]^T$ 。

AO 方向上的单位矢量, α 为固定杆 l_1 与 l_2 的夹角, S_i 为 OC_i 方向上的单位矢量, S_i 与 e 间的夹角为 τ , τ 的大小和机构的尺寸有关且为已知, 单位矢量 t_i 垂直于平面 OB_iE 。其中 $i=1, 2$ 。

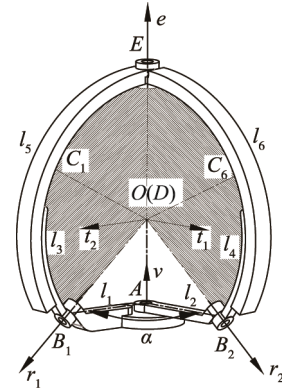


图 1 RPR/RRPR 球面并联机构构型
Fig.1 Configuration of RPR/RRPR spherical parallel mechanism

静坐标系 $O-xyz$ 以 O 为坐标原点, 定坐标系的 z 轴沿 AO 方向, x 轴过 O 点平行于 AB_1 , 沿 AB_1 方向。y 轴根据右手准则来确定, 动坐标系 $D-xyz$ 以 D 为坐标原点 (D 与 O 重合), 动坐标系的 z 轴沿矢量 e 的方向, y 轴与矢量 t_1 的方向平行, x 轴通过右手准则来确定。动坐标系相对于静坐标系 z-y-z 型的 3 个欧拉角为 $\varphi_z, \theta_y, \psi_z$, 反映动坐标系最终的姿态矩阵为:

矢量 r_2 由矢量 r_1 绕动坐标系的 z 轴旋转 α 角度得到。使用等效轴角变换公式^[15]可得:

$$r_2 = Q(v, \alpha) r_1 = r_1 \cos \alpha + (1 - \cos \alpha) v v^T r_1 + \sin \alpha (v \times r_1) \quad (3)$$

$$\cos \alpha = \frac{(r_1 \cos \beta) \cdot (r_2 \cos \beta)}{|r_1 \cos \beta| \cdot |r_2 \cos \beta|} \quad (4)$$

$$\alpha = 90^\circ + \gamma_3 \quad (5)$$

联立式 (3—5), 引入三角函数:

$$\sin \alpha = \frac{2x}{1+x^2}, \quad \cos \alpha = \frac{1-x^2}{1+x^2} \quad (6)$$

通过整理可知 γ_3 有四解, γ_3 取正值。设 n_i 为 t_i 的初始位置时的单位矢量, 则 t_i 可由 n_i 绕矢量 r_i 转过 γ_i 得到, 而 n_i 已知, 故使用等效轴角变换公式可以直接写出 t_i :

$$t_i = Q(r_i, \gamma_i) n_i = n_i \cos \gamma_i + (1 - \cos \gamma_i) i=1, 2 \quad (7)$$

$$r_i r_i^T n_i + \sin \gamma_i (r_i \times n_i)$$

由几何关系可知 t_i 与 r_i 相互垂直, 即:

$$\mathbf{t}_i^T \mathbf{r}_i = 0, i = 1, 2 \quad (8)$$

由式 (1), (7), (8), 可求得 γ_i 。

2.2 位姿正解

位姿正解是已知第 1 驱动转角 γ_1 , 第 2 驱动的转角 γ_2 以及第 3 驱动的转角 γ_3 求机构的输出参数 $\varphi_z, \theta_y, \psi_z$ 。同样使用等效轴角变换理论, 单位矢量 $\mathbf{r}_2$ 可由单位矢量 $\mathbf{r}_1$ 绕单位矢量 $\mathbf{v}$ 旋转 γ_3 角度后得到, 由等效轴角变换公式可得:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_2 &= Q(\mathbf{v}, \gamma_3) \mathbf{r}_1 \\ &= \mathbf{r}_1 \cos \gamma_3 + (1 - \cos \gamma_3) \mathbf{v} \mathbf{v}^T \mathbf{r}_1 + \sin \gamma_3 (\mathbf{v} \times \mathbf{r}_1) \end{aligned} \quad (9)$$

由式 (9) 可知, 单位矢量 $\mathbf{r}_2$ 与机构尺寸和转角 γ_3 有关。单位矢量 $\mathbf{t}_i$ 可由单位矢量 $\mathbf{n}_i$ 绕单位矢量 $\mathbf{r}_i$ 旋转 γ_i 角得到。 $\mathbf{n}_i$ 为 $\mathbf{t}_i$ 在初始状态下的矢量, 由等效轴角变换公式 (7) 可求得 $\mathbf{t}_i$ 。 $\mathbf{t}_i$ 是和机构尺寸相关的参数。 OB_i 与 OC_i 间的夹角为 δ_i , 则矢量 $\mathbf{s}_i$ 可由矢量 $\mathbf{r}_i$ 绕矢量 $\mathbf{t}_i$ 旋转 δ_i 角得到, 由等效轴角变换公式可得:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_i &= Q(\mathbf{t}_i, \delta_i) \mathbf{r}_i \\ &= \mathbf{r}_i \cos \delta_i + (1 - \cos \delta_i) \mathbf{t}_i \mathbf{t}_i^T \mathbf{r}_i + \sin \delta_i (\mathbf{t}_i \times \mathbf{r}_i) \end{aligned} \quad (10)$$

由于单位矢量 $\mathbf{t}_i \perp \mathbf{r}_i$, 式 (10) 可以化解为:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_i &= Q(\mathbf{t}_i, \delta_i) \mathbf{r}_i \\ &= \mathbf{r}_i \cos \delta_i + \sin \delta_i (\mathbf{t}_i \times \mathbf{r}_i) \end{aligned} \quad (11)$$

$\mathbf{e}$ 可由矢量 $\mathbf{s}_i$ 绕 $\mathbf{t}_i$ 旋转 τ 角得到, 由等效轴角变换公式可得:

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= Q(\mathbf{t}_i, \tau) \mathbf{s}_i \\ &= \mathbf{s}_i \cos \tau + (1 - \cos \tau) \mathbf{t}_i \mathbf{t}_i^T \mathbf{s}_i + \sin \tau (\mathbf{t}_i \times \mathbf{s}_i) \end{aligned} \quad (12)$$

联立式 (7), (9), (11), (12) 求解 δ_i , 由 δ_i 可求得机构的运动学正解。

3 工作空间分析

球面并联机构的可达工作空间是指机构输出参考点 E 在所有姿态下可到达位置的点的集合, 这些点的集合也称作球面并联机构的最大工作空间。RPR/RRPR 机构的最大工作空间和形状是和机构的尺寸和结构是相关的。文中研究的 RPR/RRPR 球面并联机构为一对称机构, 在考虑各种干涉的情况下,

通过研究当 α 为 $90^\circ, 120^\circ, 150^\circ$ 时机构的最大工作空间来分析机构的工作空间。

机构的球面半径设为 400 mm , 当 $\alpha=90^\circ$ 时, 第 1、第 2 驱动的输入变量范围为 $[0^\circ, 44.97^\circ]$; 当 $\alpha=120^\circ$ 时, 第 1、第 2 驱动的输入变量范围为 $[-41.34^\circ, 33.16^\circ]$; 当 $\alpha=150^\circ$ 时, 第 1、第 2 驱动的输入变量范围为 $[-69.25^\circ, 17.71^\circ]$ 。通过运动学分析, 利用 Matlab 编程绘制参考点 E 的可达工作空间见图 2。

使用 SolidWorks 运动仿真模块仿真机构分别在 $\alpha=90^\circ, \alpha=120^\circ, \alpha=150^\circ$ 时给定相应的驱动条件, 通过轨迹跟踪分别绘制出机构的可达工作空间。

对比图 2—3 可知, 通过机构运动学模型绘制的可达工作空间与 SolidWorks 运动仿真绘制的可达工作空间形状基本一致。机构在可达工作空间内部运动是连贯的, 运动性能良好。通过分析 RPR/RRPR 球面并联机构可达工作空间, 将 RPR/RRPR 球面并联机构用作球面外包装的喷绘和雕刻具有较大的工作空间, 且运动性能良好。

通过 Matlab 软件和 SolidWorks 软件的对比, 确定 SolidWorks 软件绘制的可达工作空间具有可参考性。当可达工作空间内的点足够密集, 使用直线将各点首尾相连, 在点足够密集的情况下, 线段的总长近似等于可达工作空间的面积。使用 SolidWorks motion 分析, 使得每秒帧数相同, 使得绘制的可达工作空间点的密集程度大致相同, 绘制不同 α 角下的可达工作空间, 并将这些点导入 CAD 将各个点首尾相连, 求得线段的总长。求得 α 分别等于 $90^\circ, 105^\circ, 120^\circ, 135^\circ, 150^\circ, 165^\circ$ 时, 可达工作空间内线段的总长分别为 $21271.031, 43\ 036.612, 65\ 812.117, 83\ 604.338, 95082.015, 10\ 1636.268 \text{ mm}$, 因此可达工作空间的面积近似为 $21\ 271.031, 43\ 036.612, 65\ 812.117, 83604.338, 95\ 082.015, 101\ 636.268 \text{ mm}^2$ 。可达工作空间随 α 角的变化趋势见图 4。

α 角在区间 $[90^\circ, 180^\circ]$ 内时, 机构的可达工作空间随 α 角的增大而逐渐增大且变化趋势逐渐减小。 α 角取值范围为 $[90^\circ, 270^\circ]$ 。由于机构为对称机构, α 在 $[90^\circ, 180^\circ]$ 内的可达工作空间与 α 在 $[180^\circ, 270^\circ]$ 内可达工作空间呈镜像对称关系。

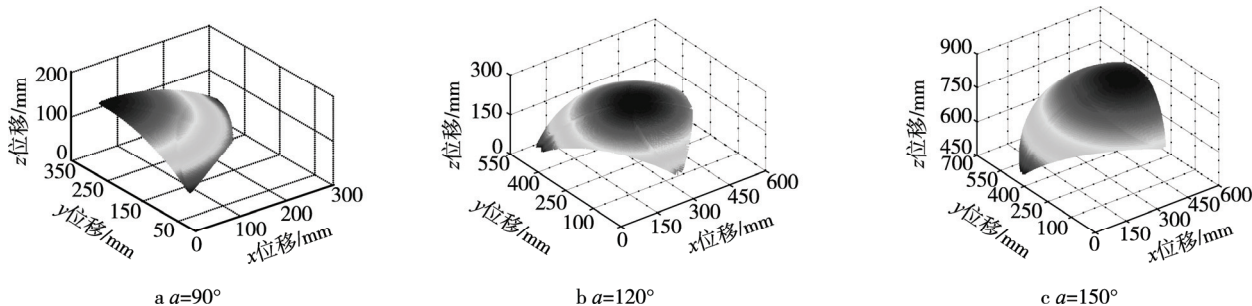


图 2 Matlab 求解参考点 E 的可达工作空间

Fig.2 Reachable workspace of reference point E solved by Matlab

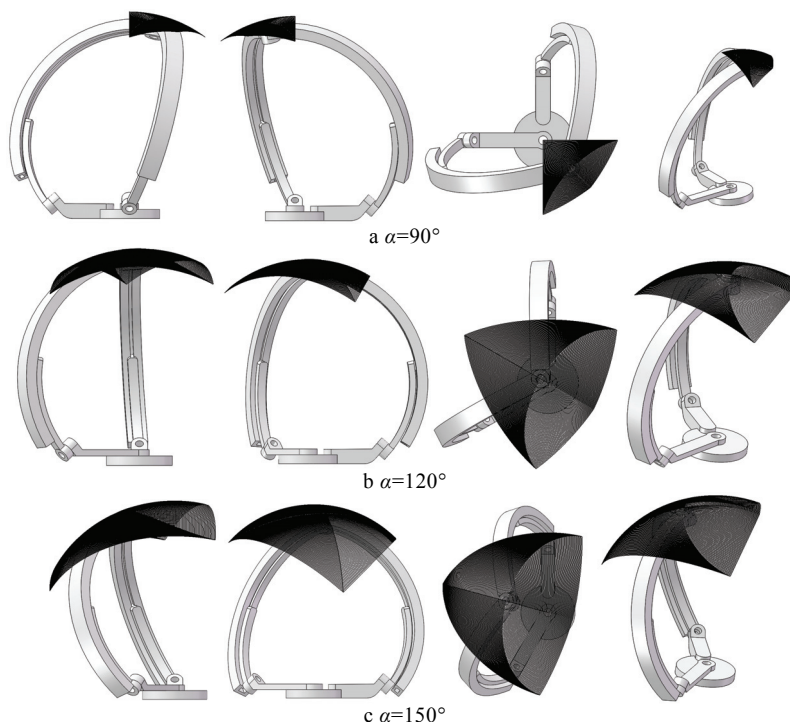
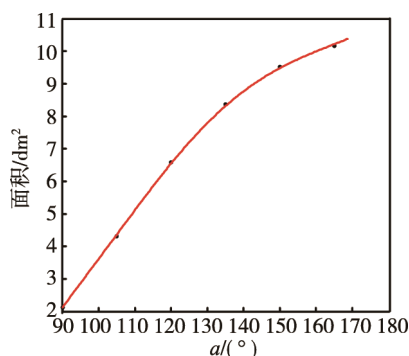
图3 SolidWorks 绘制参考点 E 的可达 workspaceFig.3 Reachable workspace of reference point E drawn with SolidWorks

图4 可达 workspace 面积变化趋势

Fig.4 The change trend of the reachable workspace area

4 结语

提出了一种两支链三自由度的 RPR/RRPR 球面并联机构,建立了数学模型并求得了机构的正逆解,并使用软件仿真得到结论:通过运动学模型绘制的可达 workspace 与 SolidWorks 运动仿真绘制的可达 workspace 形状基本一致,验证了 RPR/RRPR 球面并联机构运动学分析的正确性;RPR/RRPR 球面并联机构的可达 workspace 的大小与 α 角有关,且 α 角在 $[90^{\circ}, 180^{\circ}]$ 与 $[180^{\circ}, 270^{\circ}]$ 范围内时,可达 workspace 呈镜像对称,在一个对称 workspace 内,可达 workspace 随 α 角的增大而增大。

参考文献:

[1] 白龙,孙牧原,崔国华,等.三平动并联机构动力学建

模与 workspace 分析[J].包装工程,2015,36(23):88—93.
BAI Long, SUN Mu-yuan, CUI Guo-hua, et al. Dynamics Modeling and Workspace Analysis of Three Translational Parallel Mechanism[J]. Packaging Engineering, 2015, 36(23): 88—93.

[2] 张二吻,毛健,王大志.调平二自由度球面并联机构运动学分析与求解[J].西安科技大学学报,2016,36(6):888—893.

ZHANG Er-wen, MAO Jian, WANG Da-zhi. Kinematics Analysis and Solution of Leveling Spherical Parallel Mechanism with Two Degrees of Freedom[J]. Journal of Xi'an University of Science and Technology, 2016, 36(6): 888—893.

[3] 李俊帅,马春生,李瑞琴,等.3UPS+1RPU 非对称并联机构的刚度与模态分析[J].包装工程,2017,38(5):127—131.

LI Jun-shuai, MA Chun-sheng, LI Rui-qin, et al. Stiffness and Modal Analysis of 3UPS+1RPU Asymmetrical Parallel Mechanism[J]. Packaging Engineering, 2017, 38(5): 127—131.

[4] 周玉林,高峰.3-RRR 3 自由度球面并联机构静刚度分析[J].机械工程学报,2009,45(4):25—32.

ZHOU Yu-lin, GAO Feng. Stiffness Analysis of Spherical Parallel Mechanism 3-RRR with 3-DOF[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2009, 45(4): 25—32.

[5] 王超群,高蹕,陈柏,等.3-RRR 球面并联机构的工作空间分析及结构优化[J].机械设计与制造,2015(4):55—58.

WANG Chao-qun, GAO Chuo, CHEN Bai, et al. Workspace Analysis and Structure Optimization of

- 3-RRR Spherical Parallel Mechanism[J]. Machinery Design & Manufacture, 2015(4): 55—58.
- [6] 赵建文, 宋胜涛, 李瑞琴, 等. 2-RPR+RRP 球面混联机构的可达工作空间研究[J]. 机械传动, 2017, 41(1): 24—27.
ZHAO Jian-wen, SONG Sheng-tao, LI Rui-qin, et al. Research of Reachable Workspace of 2-RPR+RRP Spherical Hybrid Mechanism[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2017, 41(1): 24—27.
- [7] 黄真, 赵永生, 赵铁石. 高等空间机构学 (第二版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2014.
HUANG Zhen, ZHAO Yong-sheng, ZHAO Tie-shi. Advanced Spatial Mechanism (2 Edition)[M]. Beijing: Higher Education Press, 2014.
- [8] 李大海, 李瑞琴, 宋胜涛, 等. 3-RRS 球面并联机构的位置解及工作空间研究[J]. 机械传动, 2016, 40(10): 17—22.
LI Da-hai, LI Rui-qin, SONG Sheng-tao, et al. Study on the Position Solution and Workspace of 3-RRS Spherical Parallel Mechanism[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2016, 40(10): 17—22.
- [9] 随磊. 3-RPR 球面并联机构的运动学与刚度的研究 [D]. 太原: 中北大学, 2015.
SUI Lei. Research on Kinematics and Stiffness of 3-RPR Spherical Parallel Mechanism[D]. Taiyuan: North University of China, 2015.
- [10] WU G L, ZOU P. Comparison of 3-DOF Asymmetrical Spherical Parallel Manipulators with Respect to Motion/Force Transmission and Stiffness[J]. Mechanism and Machine Theory, 2016, 105: 369—387.
- [11] HOUSSEM S, MED A L, SAÏD Z. Optimal Torque Distribution for a Redundant 3-RRR Spherical Parallel Manipulator Used as a Haptic Medical Device[J]. Robotics and Autonomous Systems, 2017, 89: 40—50.
- [12] QU Y X, XU A P, LI W M, et al. Velocity Performance Analysis of a Novel 2-DOF Fully-Decoupled Spherical Parallel Mechanism[C]// 2009 Second International Conference on Intelligent Networks and Intelligent Systems, 2009: 546—549.
- [13] JAVAD E, ALIREZA A T. Accuracy and Stiffness Analysis of a 3-RRP Spherical Parallel Manipulator[J]. Robotica, 2011, 29(2): 193—209.
- [14] 杨勇智, 程璧, 段学超. 一种两自由度球面并联机构的建模与分析[J]. 世界科技研究与发展, 2016, 38(5): 1054—1059.
YANG Yong-zhi, CHENG Bi, DUAN Xue-chao. Modeling and Analysis of 2-DOF Spherical Parallel Manipulator[J]. World Sci-Tech R & D 2016, 38(5): 1054—1059.
- [15] WAMPLER C W. On a Rigid Body Subject to Point-plane Constraints[J]. Journal of Mechanical Design, 2006, 128(1): 151—158.