

三维紧致化存储系统中货架尺寸的优化研究

邓旭东, 张马萍, 吴应强, 任亮
(武汉科技大学恒大管理学院, 武汉 430065)

摘要: **目的** 当存储系统出入口位于货架底端中点位置并采取双命令周期存储模式时, 对系统尺寸进行设计, 以使仓储的空间得到最大化利用。**方法** 建立三维紧致化存储系统双命令周期行程时间数学模型, 假设系统出入口位于货架底端的位置, 分 6 种情形展开讨论, 研究自动化仓储系统出入口位置的设计问题。**结果** 通过模型优化求解, 确定选择类型 5 (使 $a^*=1.1$, $b^*=0.63$), 系统的长高宽比例为 1.1 : 0.71 : 1.2 时, 堆垛机运行效率最高。**结论** 通过仿真得出, 当三维紧致化存储系统中货架尺寸长高宽比例为 1.1 : 0.71 : 1.2 时, 双命令周期下的系统期望行程时间最小, 即三维紧致化存储系统在该比例下执行双命令存取操作, 耗时最短。

关键词: 自动化存储系统; 双命令周期; 系统出入口; 货架尺寸

中图分类号: TB486 文献标识码: A 文章编号: 1001-3563(2019)21-0173-06

DOI: 10.19554/j.cnki.1001-3563.2019.21.025

Optimization of Rack Dimensions of the 3D Compact System

DENG Xu-dong, ZHANG Ma-ping, WU Ying-qiang, REN Liang

(School of Evergrande Management, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430065, China)

ABSTRACT: The work aims to design the system dimensions to maximize the storage space, when the input/output ports of the system are at the midpoint of the bottom of the rack. The mathematical model of the dual-command cycle travel time of the 3D compact system was established. It was assumed that the input/output ports of the system were at the bottom of the rack, and the discussion was carried out in six situations to study the design problem of the input/output ports of the automatic storage system. Based on the solution optimized by the model, type 5 was selected ($a^*=1.1$, $b^*=0.63$). When the ratio of length to width to height of the system was 1.1 : 0.71 : 1.2, the running efficiency of the stacker was the best. From the simulation, when the rack dimensions of the 3D compact system (length:width:height ratio) is 1.1 : 0.71 : 1.2, the expected travel time of the system under the dual-command cycle is the least, namely the 3D compact system performs the dual-command cycles operation at this ratio for the shortest time.

KEY WORDS: automatic storage system; dual-command cycles; input/output ports of the system; rack dimensions

凭借全自动化、高效率和高空间利用率等优势, 三维紧致化自动存储/检索系统 (AS/RS) 已经越来越多地被用于存储和拣取库存物品^[1]。文中研究的重点是基于传送带的三维紧致化存取系统, 之前的研究在

考虑单命令周期的情况下进行了底端中点 I/O 点策略的研究, 文中建立双命令周期的行程时间模型。

关于三维紧致化仓储系统, De Koster 等^[2]研究了不同存储策略下的机架优化设计, 杨鹏等^[3]研究了堆

收稿日期: 2019-05-22

基金项目: 湖北省教育厅科学技术研究项目 (Q20171104)

作者简介: 邓旭东 (1964—), 男, 硕士, 武汉科技大学教授, 主要研究方向为管理优化与决策、服务系统工程与运作管理、战略与决策管理、物流与供应链管理、项目管理。

垛机的速度曲线对优化机架尺寸的影响, Yu 等^[4]用排序启发式方法研究了排序问题。以上研究假设 I/O 点位于机架的左下方, 但位于左下方并不一定会产生三维紧致化仓储系统的最佳性能。Hao 等^[5]将 I/O 点设置在机架的下中点, 开发了该系统的设计模型。I/O 点用于保存要存储和拣取的库存项目, 关于 I/O 点的位置问题, Bozer 等^[6]开发了期望行程时间表达式来分析 4 种替代配置, Randhawa 等^[7]建立了仿真模型以评估 I/O 点的数量和位置对系统性能的影响, 后者的结果表明, 将 I/O 点置于过道的中点会带来比过道末端更高的吞吐量。Hao 等^[5]开发了三维紧致化仓储系统的设计模型, 证明了位于多深机架底端中点的 I/O 点可以在预期的行程时间内获得更好的系统性能。停驻点是指堆垛机闲置时的位置, 关于停驻点策略问题, Bozer 等^[6]研究了用于定位堆垛机的可替代停驻点政策, 可作如下简要描述。

1) 即时驻留点策略。单命令存储操作完成后, 堆垛机停留在存储位置; 在单命令拣取操作或双命令循环完成后, 堆垛机停留在输出点。

2) I/O 点策略。单命令存储操作完成后, 堆垛机转移到输入点; 在单命令拣取操作或双命令循环完成后, 堆垛机停留在输出点。

3) 返回中间策略。在单命令拣取操作或双命令循环完成后, 堆垛机转移到机架的中间位置。

4) 返回出发点策略。在单个命令拣取操作或双命令循环完成后, 堆垛机转移到输入点。

Park^[8]提出了一种优化停驻点策略, 利用专用存储器确定时间机架中正方形的最佳停驻点, 并确定输入点是专用存储器中更好的可选停驻点。Berg^[9]在随机和基于类的存储策略下, 推导出了堆垛机最佳停驻点位置的解析表达式。Meneghetti^[10]从新的可持续发展角度出发, 分析了停驻点政策, 包括节能性能与传统拣取时间的减少。在文中研究, 采用 I/O 驻留点策略。

自动化仓储系统的操作模式包括单个、双个或多个命令周期。双命令周期涉及到 I/O 点的存储和拣取操作。Bozer 等^[11]侧重于研究自动化仓储系统的排序问题, 开发了使用几何概念的启发式程序来解决切比雪夫旅行商问题。Gagliardi^[12]提出了一种新的整数线性程序模型, 模拟自动化仓储系统的排序问题。Meneghetti^[13]将双指令周期通过约束编程方法进行优化, 并与大邻域搜索相结合, 从时间或能量角度得出了最佳的机架形状。Hausman^[14]等提出了一种确定机组负荷 AS/RS 双周期时间最小运行时间的逐步排序方法。上述 2 篇文章中, 假设存储和拣取的位置不是预先知道的。在 Hu 等的研究中, 采用的假设是, 对于分离式平台 AS/RS, 在每次操作期间并不知道存储系统后一步的操作指令, 后来 Liu 等^[15]在分离式平台 AS/RS 中采用双命令周期的假设。

文中在 Hao 等研究的基础上进行改进, 原有的自动化存储系统中系统出入口位于货架底端左侧, 文中引入位于货架底端中点的系统出入口, 并且将原有单命令周期改进成双命令周期的操作模式, 通过建立双命令周期下的系统期望行程时间模型, 再将优化问题化分成 6 种情况进行分析, 来推导货架的 3 个方向的最优尺寸, 计算出每种情况下三维紧致化存储系统的货架尺寸和系统容积, 对比结果寻求一个最优的货架尺寸比例。

1 问题假设与模型建立

1.1 问题假设

三维紧致化存储系统 (3D compact system) 由一个三维存储货架 (3D storage rack)、一个堆垛机 (S/R machine)、一个系统出入口 (Input/output port) 和多个在深度方向上运行的传送带 (conveyor) 组成, 见图 1。三维紧致化存储系统的传送带分为电力传送带和重力传送带, 文中主要研究电力传送带, 且这些传送带被成对安装在每层存储货架上。系统出入口设置在存储货架底端中点的位置, 并且当堆垛机处于空闲期时, 它停驻在系统出入口位置。

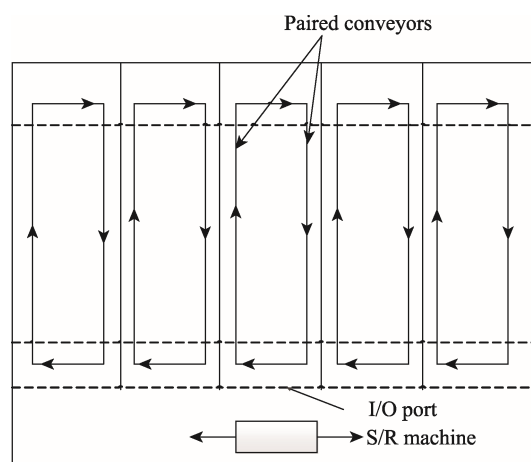


图 1 三维紧致化存储系统 (俯视图)

Fig.1 3D compact system (top view)

当系统对单位货物进行拣取或存储操作时, 自动化存储系统的构成部分沿水平方向 (x)、垂直方向 (z) 和深度方向 (y) 同时移动, 即堆垛机在水平方向和垂直方向上同时以恒定速度移动, 因此到达货架上任何位置的系统行程时间必须近似服从切比雪夫定律, 传送带独立于堆垛机的移动, 沿着深度方向成对以恒定速度运行。文中研究的系统与 Bozer 等、Hausman 等、Le-Duc 等人研究的系统相同, 故按照前人研究的假设: 三维存储货架有一个连续的矩形存储面, 采取随机存储策略, 所以拣选面上任何一点都具有相同的可能性被选择用于存储或者拣取操作。堆垛机在拣

取点拾起货物和在存储点放下货物的时间也是整个行程时间的一部分,为了简化分析,该部分时间忽略不计。堆垛机采取双命令周期,即一次操作包含货物的存储和检索。

1.2 模型建立

1.2.1 符号说明

L 为存储货架的长度; H 为存储货架的高度; $2S$ 为一对传送带的长度; s_c 为传送带的速度; s_h 为堆垛机水平方向的移动速度; s_v 为堆垛机垂直方向的移动速度; $t_h=L/s_h$, 为仓储货架的长度(时间单位); $t_v=L/s_v$, 为仓储货架的高度(时间单位); $t_c=2S/s_c$, 为传送带的长度(时间单位); $a=t_c/t_h$ (形状因子); $b=t_v/t_h$ (形状因子); W 为存货去程所需时间; U 为取货回程所需时间; D 为堆垛机从存储点到另一个拣取点的行程时间; E_{DC} 为双命令周期下的系统期望行程时间。

系统的物理体积为 $V'=HLS$ (m^3), 并且 V' 是一个常数。基于上述数学符号说明, $V'=(t_v s_v)(t_h s_h)(0.5t_c s_c)$ 。系统的时间体积为 $V=t_v t_h t_c$ (立方时间单位), 并且 V 是一个常数。因此, V' 和 V 的关系为:

$$V = \frac{2V'}{s_h s_v s_c} \quad (1)$$

假设 (X, Y, Z) 表示为存储或检索位置的一个坐标点, X 代表堆垛机从系统出入口水平移动至存储点的距离, Y 代表堆垛机上载货托盘从系统出入口垂直移动至存储点的距离, Z 代表传送带深度方向移动单位货物的距离。因此, 双命令周期下的系统期望行程时间可以表示为:

$$E_{DC} = E(W) + E(D) + E(U) \quad (2)$$

1.2.2 存取货物去程期望时间 $E(W)$

W 是存储货物去程时间, 所以 W 是 X, Y, Z 中的最大值, 即 $E(W)$ 可以被表示为:

$$E(W) = \int_0^{\max(0.5t_h, t_c, t_v)} w f(w) dw \quad (3)$$

其中: $f(w)$ 是行程时间 w 的概率密度函数; $F(w)$ 为概率分布函数。由于堆垛机的水平运动, 堆垛机上载物托盘的垂直运动及传送带的深度运动均相互独立, 所以:

$$F(w) = P(W \leq w) = P(\max\{X, Y, Z\} \leq w) = P(X \leq w)P(Y \leq w)P(Z \leq w) \quad (4)$$

Hao 等根据 $0.5t_h, t_v, t_c$ 之间的关系, 分成 6 种类型进行研究。如果 $0.5t_h$ 是最大值, 则有 $t_v \leq t_c \leq 0.5t_h, t_c \leq t_v \leq 0.5t_h$; 如果 t_c 是最大值, 则有 $0.5t_h \leq t_v \leq t_c, t_v \leq 0.5t_h \leq t_c$; 如果 t_v 是最大值, 则有 $0.5t_h \leq t_c \leq t_v, t_c \leq 0.5t_h \leq t_v$ 。结果如下:

$$E(W)_1 = \frac{4t_c^3 + 3t_c t_h^2 + 2t_v^3}{12t_c t_h}, t_v \leq t_c \leq 0.5t_h \quad (5)$$

$$E(W)_2 = \frac{2t_c^3 + 3t_v t_h^2 + 4t_v^3}{12t_v t_h}, t_c \leq t_v \leq 0.5t_h \quad (6)$$

$$E(W)_3 = \frac{t_h^3 + 48t_c^2 t_v + 16t_v^3}{96t_c t_v}, 0.5t_h \leq t_v \leq t_c \quad (7)$$

$$E(W)_4 = \frac{t_h^3 + 12t_c^2 t_h + 4t_v^3}{24t_c t_h}, t_v \leq 0.5t_h \leq t_c \quad (8)$$

$$E(W)_5 = \frac{t_h^3 + 48t_v^2 t_c + 16t_c^3}{96t_c t_v}, 0.5t_h \leq t_c \leq t_v \quad (9)$$

$$E(W)_6 = \frac{t_h^3 + 12t_v^2 t_h + 4t_c^3}{24t_h t_v}, t_c \leq 0.5t_h \leq t_v \quad (10)$$

1.2.3 存取货物回程期望时间 $E(U)$

U 为取货回程所需时间, 所以 U 是 X, Y 中最大的值。 $E(U)$ 可以被表示为:

$$E(U) = \int_0^{\max(0.5t_h, t_v)} u f(u) du \quad (11)$$

式中: $f(u)$ 是行程时间 u 的概率密度函数。 $F(u)$ 为概率分布函数:

$$F(u) = P(U \leq u) = P(\max(X, Y) \leq u) = P(X \leq u)P(Y \leq u) \quad (12)$$

根据 Hao 等人的研究, $E(U)$ 结果表示如下:

$$E(U)_1 = \frac{t_v^2}{3t_h} + \frac{t_h}{4}, t_v \leq 0.5t_h \quad (13)$$

$$E(U)_2 = \frac{t_h^2}{24t_v} + \frac{t_v}{2}, t_v \geq 0.5t_h \quad (14)$$

1.2.4 双命令周期这个存储点到拣取点期望时间 $E(D)$

D 为堆垛机从存储点到另一个拣取点的行程时间, Bozer 和 White 在其研究中证明了 $E(D)$ 的表达式, 结果如下:

$$f_D(d) = \begin{cases} \frac{2-2d}{2d/\beta-d^2/\beta^2} + \frac{2d-d^2}{2/\beta-2d/\beta^2} & \text{if } 0 \leq d \leq \beta \\ 2-2\beta & \text{if } \beta < d \leq 1 \end{cases}$$

$$E(D) = \left(\frac{1}{3} + \frac{\beta^2}{6} - \frac{\beta^3}{30} \right) t_h \quad (15)$$

其中 $\beta = \frac{t_v}{t_h} (\beta \leq 1)$, 则有:

$$E(D) = \left(\frac{1}{3} + \frac{t_v^2}{6t_h^2} - \frac{t_v^3}{30t_h^3} \right) t_h = \frac{t_h}{3} + \frac{t_v^2}{6t_h} - \frac{t_v^3}{30t_h^2} \quad (16)$$

1.2.5 双命令周期下的系统期望行程时间 E_{DC}

E_{DC} 为双命令周期下的系统期望行程时间, $E_{DC} = E(W) + E(D) + E(U)$ 。 因为 $a=t_c/t_h, b=t_v/t_h$,

$V = t_v t_h t_c$ 之间的关系, 可以得到 $t_h = \sqrt[3]{\frac{V}{ab}}, t_c = \sqrt[3]{\frac{a^2 V}{b}}$,

$t_v = \sqrt[3]{\frac{b^2 V}{a}}$, 因此系统期望行程时间 E_{DC} 表达式为:

$$E_{DC} = E(W) + E(D) + E(U) =$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{30} V^{\frac{1}{3}} (10a^3 - ab^3 + 15ab^2 + 25a + 5b^3) a^{\frac{4}{3}} b^{\frac{1}{3}} & b \leq a \leq 0.5 \\ \frac{1}{30} V^{\frac{1}{3}} (5a^3 - b^4 + 25b^3 + 25b) a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{4}{3}} & a \leq b \leq 0.5 \\ \frac{1}{120} V^{\frac{1}{3}} (60a^2 - 4ab^3 + 60ab^2 + 70a + 20b^3 + 5a^{\frac{4}{3}} b^{\frac{1}{3}}) & b \leq 0.5 \leq a \\ \frac{1}{480} V^{\frac{1}{3}} (80a^3 - 16ab^4 + 80ab^3 + 480ab^2 + 160ab + 20a + 5) a^{\frac{4}{3}} b^{\frac{4}{3}} & 0.5 \leq b \leq a \\ \frac{1}{480} V^{\frac{1}{3}} (240a^2 b - 16ab^4 + 80ab^3 + 240ab^2 + 160ab + 20a + 80b^3 + 5) a^{\frac{4}{3}} b^{\frac{4}{3}} & 0.5 \leq b \leq a \\ \frac{1}{60} V^{\frac{1}{3}} (10a^3 - 2b^4 + 10b^3 + 60b^2 + 20b + 5) a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{4}{3}} & a \leq 0.5 \leq b \end{array} \right. \quad (17)$$

2 三维紧致化存储系统中货架尺寸的优化

将 E_{DC} 表达式进行化简, 根据 $a, b, 0.5$ 之间的关系, 将优化问题化分成 6 种情况进行分析, 来推导货架的 3 个方向的最优尺寸。计算出每种情况下三维紧致化存储系统的货架尺寸和系统容积, 对比结果寻求一个最优的货架尺寸比例。

2.1 类型 1 ($b \leq a \leq 0.5$)

$$E_{DC1} = \frac{V^{\frac{1}{3}} (10a^3 - ab^3 + 15ab^2 + 25a + 5b^3)}{30a^{\frac{4}{3}} b^{\frac{1}{3}}} \quad (18)$$

因为 V 是一个常数, 可以得到下列相等的优化问题 (EOP, Equivalent Optimization Problem):

$$\text{Minimize } EOP_E_{DC1}(a, b) = \frac{10a^3 - ab^3 + 15ab^2 + 25a + 5b^3}{30a^{\frac{4}{3}} b^{\frac{1}{3}}} \quad (19)$$

约束条件:

$$D1 = \{(a, b) | b \leq a \leq 0.5\} \quad (20)$$

在简化的模型中, $EOP_E_{DC1}(a, b)$ 被认为是凸函数。为了证明目标函数 $EOP_E_{DC1}(a, b)$ 是凸函数, 首先定义 $f_1(a, b) = EOP_E_{DC1}(a, b)$ 。可以检验函数的海塞矩阵, 如果函数的海塞矩阵是正定的, 则有 $f_1(a, b)$ 是凸函数。

检验海塞矩阵, 有:

$$\frac{\partial^2 f_1(a, b)}{\partial a^2} = \frac{2}{a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}}} + \frac{14(10a^3 - ab^3 + 15ab^2 + 25a + 5b^3)}{135a^{\frac{10}{3}} b^{\frac{1}{3}}} - \frac{4(30a^2 - b^3 + 15b^2 + 25)}{45a^{\frac{7}{3}} b^{\frac{1}{3}}} \quad (21)$$

$$\frac{\partial^2 f_1(a, b)}{\partial b^2} = \frac{-3b^2 + 30b}{30a^{\frac{4}{3}} b^{\frac{1}{3}}} - \frac{2(30ab - 3ab^2 + 15b^2)}{45a^{\frac{7}{3}} b^{\frac{1}{3}}} +$$

$$\frac{2(10a^3 - ab^3 + 15ab^2 + 25a + 5b^3)}{135a^{\frac{7}{3}} b^{\frac{4}{3}}} -$$

$$\frac{30a^2 - b^3 + 15b^2 + 25}{90a^{\frac{4}{3}} b^{\frac{4}{3}}}$$

运用 Matlab R2016a 验证了在 $0 \leq b \leq a \leq 0.5$ 时:

$$\frac{2}{a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}}} + \frac{14(10a^3 - ab^3 + 15ab^2 + 25a + 5b^3)}{135a^{\frac{10}{3}} b^{\frac{1}{3}}} -$$

$$\frac{4(30a^2 - b^3 + 15b^2 + 25)}{45a^{\frac{7}{3}} b^{\frac{1}{3}}} > 0$$

$$\frac{-3b^2 + 30b}{30a^{\frac{4}{3}} b^{\frac{1}{3}}} - \frac{2(30ab - 3ab^2 + 15b^2)}{45a^{\frac{7}{3}} b^{\frac{1}{3}}} +$$

$$\frac{2(10a^3 - ab^3 + 15ab^2 + 25a + 5b^3)}{135a^{\frac{7}{3}} b^{\frac{4}{3}}} -$$

$$\frac{30a^2 - b^3 + 15b^2 + 25}{90a^{\frac{4}{3}} b^{\frac{4}{3}}} > 0$$

即:

$$\frac{\partial^2 f_1(a, b)}{\partial a^2} > 0, \frac{\partial^2 f_1(a, b)}{\partial b^2} > 0$$

最后可证:

$$h = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f_1(a, b)}{\partial a^2} & \frac{\partial^2 f_1(a, b)}{\partial a \partial b} \\ \frac{\partial^2 f_1(a, b)}{\partial a \partial b} & \frac{\partial^2 f_1(a, b)}{\partial b^2} \end{vmatrix} \geq 0 \quad (22)$$

所以函数的海塞矩阵是正定的, 可以认为

$EOP_EDC1(a,b)$ 是凸函数，因此， $EOP_EDC1(a,b)$ 是一个凸规划，即函数的最优解就是全局最优解。通过 Matlab R2016a 对 $EOP_EDC1(a,b)$ 进行求解，求得 $a^* = 0.83$ ， $b^* = 0.57$ ， $Minimize EOP_EDC1(a,b) = 1.61$ ，又因为 $t_h = \sqrt[3]{\frac{V}{ab}}$ ， $t_v = \sqrt[3]{\frac{a^2V}{b}}$ ， $t_c = \sqrt[3]{\frac{b^2V}{a}}$ ，可以得到 $t_h^* = 1.3\sqrt[3]{V}$ ， $t_v^* = 0.73\sqrt[3]{V}$ ， $t_c^* = 1.1\sqrt[3]{V}$ ，即当 $0 \leq b \leq a \leq 0.5$ 时，三维紧致化存储系统的存储货架尺寸（时间单位）比例为 $t_h^* : t_v^* : t_c^* = 1.3 : 0.73 : 1.1$ ，双命令周期下的系统期望行程时间为 $EDC1^* = 1.61\sqrt[3]{V}$ 。

2.2 类型 5 ($0.5 \leq b \leq a$)

类型 5 的求解过程与类型 1 相同，但因为类型 5 是最优解，所以此处给出计算过程：

$$EDC5 = \frac{1}{480}V^{\frac{1}{3}}(240a^2b - 16ab^4 + 80ab^3 + 240ab^2 + 160ab + 20a + 80b^3 + 5)a^{\frac{4}{3}}b^{-\frac{4}{3}} \quad (23)$$

因为 V 是一个常数，可以得到下列相等的优化问题（EOP）：

$$Minimize EOP_EDC5(a,b) = \frac{1}{480}(240a^2b - 16ab^4 + 80ab^3 + 240ab^2 + 160ab + 20a + 80b^3 + 5)a^{\frac{4}{3}}b^{-\frac{4}{3}} \quad (24)$$

约束条件：

$$D5 = \{(a,b) | 0.5 \leq b \leq a\} \quad (25)$$

在简化的模型中， $EOP_EDC5(a,b)$ 被认为是凸函数，证明过程和类型一相同，即验证函数的海塞矩阵是否正定。通过 Matlab R2016a 对 $EOP_EDC5(a,b)$ 进行求解，求得 $a^* = 1.1$ ， $b^* = 0.63$ ， $Minimize EOP_EDC5(a,b) = 1.579$ ，又因为 $t_h = \sqrt[3]{\frac{V}{ab}}$ ， $t_v = \sqrt[3]{\frac{a^2V}{b}}$ ， $t_c = \sqrt[3]{\frac{b^2V}{a}}$ ，可以得到 $t_h^* = 1.1\sqrt[3]{V}$ ， $t_v^* = 0.71\sqrt[3]{V}$ ， $t_c^* = 1.2\sqrt[3]{V}$ ，即当 $0.5 \leq b \leq a$ 时，三维紧致化存储系统的存储货架尺寸（时间单位）比例为 $t_h^* : t_v^* : t_c^* = 1.1 : 0.71 : 1.2$ ，双命令周期下的系统期望行程时间为 $EDC5^* = 1.579\sqrt[3]{V}$ 。

2.3 其他类型

类型 2—4、类型 6 和类型 1 拥有相似的计算过程，为了简化计算过程，只展示其余类型的结果。类型 2：

$$a \leq b \leq 0.5, EDC2 = \frac{V^{\frac{1}{3}}(5a^3 - b^4 + 25b^3 + 25b)}{30a^{\frac{1}{3}}b^3}$$

(26)

当 $a \leq b \leq 0.5$ 时，可得 $t_h^* = 1.3\sqrt[3]{V}$ ， $t_v^* = 1.3\sqrt[3]{V}$ ， $t_c^* = 0.63\sqrt[3]{V}$ ，三维紧致化存储系统的存储货架尺寸（时间单位）比例为 $t_h^* : t_v^* : t_c^* = 1.3 : 1.3 : 0.63$ ，双命令周期下的系统期望行程时间为 $EDC2^* = 1.97\sqrt[3]{V}$ 。

类型 3：

$$b \leq 0.5 \leq a,$$

$$EDC3 = \frac{V^{\frac{1}{3}}(60a^2 - 4ab^3 + 60ab^2 + 70a + 20b^3 + 5)}{120a^{\frac{4}{3}}b^3} \quad (27)$$

当 $b \leq 0.5 \leq a$ 时，可得 $t_h = 1.1\sqrt[3]{V}$ ， $t_v^* = 0.7\sqrt[3]{V}$ ， $t_c^* = 1.3\sqrt[3]{V}$ ，三维紧致化存储系统的存储货架尺寸（时间单位）比例为 $t_h^* : t_v^* : t_c^* = 1.1 : 0.7 : 1.3$ ，双命令周期下的系统期望行程时间为 $EDC3^* = 1.581\sqrt[3]{V}$ 。

类型 4：

$$0.5 \leq b \leq a, EDC4 =$$

$$V^{\frac{1}{3}} \frac{(80a^3 - 16ab^4 + 80ab^3 + 480ab^2 + 160ab + 20a + 5)}{480a^{\frac{4}{3}}b^3} \quad (28)$$

当 $0.5 \leq b \leq a$ 时，可得 $t_h^* = 1.2\sqrt[3]{V}$ ， $t_v^* = 0.77\sqrt[3]{V}$ ， $t_c^* = 1.1\sqrt[3]{V}$ ，三维紧致化存储系统的存储货架尺寸（时间单位）比例为 $t_h^* : t_v^* : t_c^* = 1.2 : 0.77 : 1.1$ ，双命令周期下的系统期望行程时间为 $EDC4^* = 1.59\sqrt[3]{V}$ 。

类型 6：

$$a \leq 0.5 \leq b,$$

$$EDC6 = \frac{V^{\frac{1}{3}}(10a^3 - 2b^4 + 10b^3 + 60b^2 + 20b + 5)}{60a^{\frac{1}{3}}b^3} \quad (29)$$

当 $a \leq 0.5 \leq b$ 时，可得 $t_h^* = 1.6\sqrt[3]{V}$ ， $t_v^* = 0.79\sqrt[3]{V}$ ， $t_c^* = 0.79\sqrt[3]{V}$ ，三维紧致化存储系统的存储货架尺寸（时间单位）比例为 $t_h^* : t_v^* : t_c^* = 1.6 : 0.79 : 0.79$ ，双命令周期下的系统期望行程时间为 $EDC6^* = 1.71\sqrt[3]{V}$ 。

2.4 三维紧致化存储系统中货架的最优尺寸比例

通过以上 6 种类型的比较，发现类型 5 的系统期望行程时间最小，为 $EDC5^* = 1.579\sqrt[3]{V}$ ，仓储货架的长度（时间单位）为 $t_h^* = 1.1\sqrt[3]{V}$ ，仓储货架的高度（时间单位）为 $t_v^* = 0.71\sqrt[3]{V}$ ，传送带的长度（时间单位）为 $t_c^* = 1.2\sqrt[3]{V}$ ，三维紧致化存储系统的存储货架尺寸

比例为 $t_h^* \quad t_v^* \quad t_c^* = 1.1 : 0.71 : 1.2$ 。

3 结语

研究的创新在于对三维紧致化存储系统进行改进,将系统出入口位于货架底端中点位置,而不是像以往一样设置在货架底端左边,并采取双命令周期存储模式,寻求如何设计最优系统尺寸。研究结果得出,当三维紧致化存储系统中货架尺寸(长 高 宽)比例为 1.1 0.71 1.2 时,系统的期望行程时间最小,即此货架比例为货架的最优尺寸。

参考文献:

- [1] HU Y H, HUANG S Y, CHEN C, et al. Travel Time Analysis of a New Automated Storage and Retrieval System[J]. *Computers & Operations Research*, 2005, 32(6): 515—1544.
- [2] LE-DUC T, KOSTER M B M D, YU Y. Optimal Storage Rack Design for A 3-dimensional Compact AS/RS[J]. *International Journal of Production Research*, 2008, 46(6): 1495—1514.
- [3] YANG P, MIAO L, XUE Z, et al. Optimal Storage Rack Design for a Multi-deep Compact AS/RS Considering the Acceleration/deceleration of the Storage and Retrieval Machine[J]. *International Journal of Production Research*, 2015, 53(3): 929—943.
- [4] YU Y, DE KOSTER R B. Sequencing Heuristics for Storing and Retrieving Unit Loads in 3D Compact Automated Warehousing Systems[J]. *IIE Transactions*, 2012, 44(2): 69—87.
- [5] HAO J, YU Y, ZHANG L L. Optimal Design of a 3D Compact Storage System with the I/O Port at the Lower Mid-point of the Storage Rack[J]. *International Journal of Production Research*, 2015, 53(17): 1—21.
- [6] BOZER Y A, WHITE JA. WHITE Travel-time Models for Automated Storage/retrieval Systems[J]. *IIE Transactions*, 1984, 16(4): 329—338.
- [7] RANDHAWA S U, MCDOWELL E D, WANG W T. Evaluation of Scheduling Rules for Single-and Dual-dock Automated Storage/retrieval System[J]. *Computers & industrial engineering*, 1991, 20(4): 401—410.
- [8] PARK B C. Optimal Dwell Point Policies for Automated Storage/retrieval Systems with Dedicated Storage[J]. *IIE Transactions*, 1999, 31(10): 1011—1013
- [9] JEROEN P, VAN DEN BERG. Analytic Expressions for the Optimal Dwell Point in an Automated Storage/retrieval System[J]. *International Journal of Production Economics*, 2002, 76(1): 13—25.
- [10] MENEGHETTI A, MONTI L. Sustainable Storage Assignment and Dwell-point Policies for Automated Storage and Retrieval Systems[J]. *Production Planning & Control*, 2013, 24(6): 511—520.
- [11] BOZER Y A, SCHORN E C, SHARP G P. Geometric Approaches to Solve the Chebyshev Traveling Salesman Problem[J]. *IIE Transactions*, 1990, 22(3): 238—254.
- [12] GAGLIARDI J P, RENAUD J, RUIZ A. On Sequencing Policies for Unit-load Automated Storage and Retrieval Systems[J]. *International Journal of Production Research*, 2014, 52(4): 1090—1099.
- [13] MENEGHETTI A, DAL BORGIO E, MONTI L. Rack Shape and Energy Efficient Operations in Automated Storage and Retrieval Systems[J]. *International Journal of Production Research*, 2015, 53(23): 7090—7103.
- [14] HAUSMAN W H, SCHWARZ L B, GRAVES S C. Optimal Storage Assignment in Automatic Warehousing Systems[J]. *Management Science*, 1976, 22(6): 629—638.
- [15] LIU T, XU X, QIN H, et al. Travel Time Analysis of the Dual Command Cycle in the Split-platform AS/RS with I/O Dwell Point Policy[J]. *Flexible Services and Manufacturing Journal*, 2016, 3: 1—19.