$R_xP_zR_y$ 型 2R1T 部分解耦并联机构设计与分析

刘伟[1,2]，曹亚斌[1,2]
（1.西安工程大学 机电工程学院，西安 710660；2.西安市现代智能纺织装备重点实验室，西安 710660）

摘要：目的 分析部分解耦的 2R1T 并联机构驱动副旋量特征，从而设计一类新型的部分解耦的 $R_xP_zR_y$ 型 2R1T 并联机构。**方法** 基于完全解耦的并联机构的输入输出关系，将动平台角速度在定坐标系轴线方向的分量，变换为 *XYZ* 欧拉角角速度分量，得到角速度的完全解耦的分块雅可比矩阵，得到具有多个转动自由度机构的输出与输入部分解耦的关系。**结果** 设计了一种新型部分解耦 2R1T 并联机构，分析表明该机构部分解耦。**结论** 对于 $R_xP_zR_y$ 型 2R1T 并联机构在解耦设计时，使用旋量理论得到的关于角速度的雅克比矩阵不适用于具有多个转动自由度的并联机构完全解耦设计，使用文中提出的变换矩阵将其变换为关于欧拉角的角速度的雅克比矩阵，可以得到相应的对角矩阵，这种方法可以用来对具有多个转动自由度的并联机构完全解耦设计。

关键词：部分解耦；型综合；RPR 型
中图分类号：TB486；TH112 **文献标识码：**A **文章编号：**1001-3563(2020)07-0190-07
DOI：10.19554/j.cnki.1001-3563.2020.07.027

Design and Analysis of $R_xP_zR_y$ Type 2R1T Partially Decoupled Parallel Mechanism

LIU Wei[1,2], *CAO Ya-bin*[1,2]
(1.College of Mechanical ＆ Electrical Engineering, Xi'an Polytechnic University, Xi'an 710660, China;
2.Xi'an key Laboratory of Modern Intelligent Textile Equipment, Xi'an 710660, China)

ABSTRACT: The work aims to design a new type of partially decoupled 2R1T parallel mechanism of $R_xP_zR_y$ type by analyzing the characteristics of the driving pairs of the partially decoupled 2R1T parallel mechanism by screw theory. Based on the input-output relationship of the fully decoupled parallel mechanism, the component of angular velocity of the moving platform in the axis direction of the fixed coordinate system was transformed into the component of *XYZ* Euler angular velocity. The fully decoupled block Jacobian matrix of angular velocity was obtained, and the partially decoupled input-output relationship of the mechanism with multiple rotational degrees of freedom was obtained. A new partially decoupled 2R1T parallel mechanism was designed. The analysis showed that the mechanism was partially decoupled. For the decoupling design of $R_xP_zR_y$ type 2R1T parallel mechanism, the Jacobian matrix of angular velocity obtained by screw theory is not suitable for the complete decoupling design of parallel mechanism with multiple rotational degrees of freedom. The Jacobian matrix of Euler angular velocity is transformed by the proposed transformation matrix to obtain the corresponding diagonal matrix. The proposed method can be used for the complete decoupling design of parallel mechanisms with multiple rotational degrees of freedom.

KEY WORDS: partially decoupled; type synthesis; RPR type

收稿日期：2019-08-08
基金项目：科技创新平台建设工程/重点实验室建设项目（2019220614SYS021CG043）
作者简介：刘伟（1985—），男，西安工程大学讲师，主要研究方向为并联机构及机构学。
通信作者：曹亚斌（1976—），女，博士，西安工程大学讲师，主要研究方向为车辆设计。

并联机构[1]的高刚度、高精确度、高速运动的特性，使得其在分拣、抓取、装箱，等包装工业领域有着广泛的应用。包装纸箱在成型封箱时[2]，包装纸箱的摇盖的弯折需要转动、下压的动作。一般的包装箱的摇盖弯折转动的轴线含有 2 个，并且上述转动轴线互相垂直。包装箱的尺寸在包装一些新型产品时，可能发生改变，简单的摇盖机械结构不适用于上述包装过程[3]。在包装箱封箱流水线上，在包装箱行进流水线正上方布置 $R_xP_zR_y$ 型 2R1T 并联机构，在该机构的输出构件上布置具有一定弹性的操作手，可以用来对不同尺寸包装箱的不同转动轴线的摇盖进行快速弯折，以便对其封箱。

运动耦合的并联机构在运动学、动力学分析和控制方面存在一些困难，解耦并联机已成为机构学领域的研究热点之一[4]。许多学者在这一领域进行了大量的研究。

张彦斌[5—6]基于并联机构的雅可比矩阵，对 2T1R[7]型并联机构进行了完全解耦型综合。范彩霞[8]提出了一种 2R 型完全解耦的并联机构。曹毅[9]使用螺旋理论、GF 集对 1T1R 型并联机构进行了完全解耦型综合。曾达幸[10—11]对 2R1T 型并联机构进行了完全解耦型综合。Gogu[12]使用线性变换理论对不同自由度的并联机构进行了解耦、完全解耦、耦合、各向同性方面的机构型综合。值得指出的是 Gogu 对 2R1T 的并联机构进行综合时，提到 2 种不同的运动模式，$2R_{xy}T_z$ 和 $2R_{xy}T_x$，即移动自由度和转动平面平行，移动自由度和转动平面垂直 2 种。Gogu 对 PPS 型、UP 型、$2R_{xy}T_x$ 型 2R1T 并联机构进行了完全解耦、耦合、各向同性方面方面的综合。$R_xP_zR_y$ 型 2R1T 并联机构的特点是可以实现沿 x 轴的转动，在 yOz 平面内的 1 维移动，沿 y 轴的转动（与 x 轴转轴不相交），可以把这种运动模式用图 1 所示运动链表示。Li 等[13]对 $R_xP_zR_y$ 型 2R1T 并联机构使用李群理论进行了型综合，得到了一些过约束和非过约束类型的 $R_xP_yR_y$ 型 2R1T 并联机构。具有 $R_zT_yR_x$ 运动模式的并联机构，适合应用于在曲面上工作的操作手，具有刚度高、精

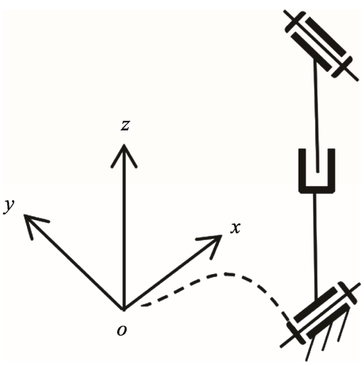

图 1　$R_xP_zR_y$ 型 2R1T 并联机构的运动模式
Fig.1 Motion pattern of $R_xP_zR_y$ type 2R1T parallel mechanism

确度高、灵巧性强等特点。例如，基于 $R_zT_yR_x$ 运动模式的并联机构，可在其动平台上串联 2 个转动副，组成混联 5 轴加工中心或者医用机器人。基于 $R_zT_yR_x$ 运动模式的 5 轴和 6 轴混联机构可以应用于焊接飞机机身，也可以用于飞机机翼的组装[14]。

综上所述，2R1T 型并联机构有多种运动模式，一些学者只对其几种运动模式的并联机构进行了运动解耦方面的综合。使用旋量理论建立雅可比矩阵可以有效的对空间移动完全解耦并联机构进行综合，然而使用雅可比矩阵进行综合完全解耦的具有多个转动自由度并联机构的研究并不多见。

1　无耦合并联机构运动学数学模型

1.1　基础理论

并联机构动平台的瞬时输出运动可用机构分支运动链的运动螺旋表示[15]，即：

$$\boldsymbol{v}=\sum_{j=1}^{F_i}\dot{q}_{ji}\$_{ji} \tag{1}$$

式中：$\boldsymbol{v}$ 为机构动平台输出的广义速度；$\$_{ji}$ 为第 i 条分支中第 j 个单自由度关节的运动螺旋；F_i 为第 i 条分支的自由度；$\dot{q}_{ji}$ 为第 i 条分支中第 j 个单自由度关节运动螺旋的速度。如果用第 i 条分支的驱动螺旋 $\$_{ai}$ 与上式左右两边同时做互易积，得到：

$$\$_{a_i}\cdot(\boldsymbol{\Pi}\,\boldsymbol{v})^{\mathrm{T}}=\dot{q}_{ji}\$_{a_i}\cdot(\boldsymbol{\Pi}\sum_{j=1}^{F_i}\$_{ji})^{\mathrm{T}} \tag{2}$$

由于一般情况下，驱动螺旋对应的运动副直接与基座相连，并且驱动螺旋除了与驱动副互易积不为 0，与连接基座和动平台的的运动链中的其他运动副旋量互易积都为 0，因此式（2）可以写为：

$$\$_{a_i}\cdot(\boldsymbol{\Pi}\,\boldsymbol{v})^{\mathrm{T}}=\dot{q}_{1i}\$_{a_i}(\boldsymbol{\Pi}\,\$_{1i})^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

式中：$\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}\omega_x & \omega_y & \omega_z & v_x & v_y & v_z\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}_{1\times6}$；$\boldsymbol{\Pi}=\begin{bmatrix}0 & \boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{E} & 0\end{bmatrix}_{6\times6}$，$\boldsymbol{E}$ 为单位 3×3 矩阵，写成矩阵形式见式（4）。

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{dir}}\cdot(\boldsymbol{\Pi}\,\boldsymbol{v})=\boldsymbol{J}_{\mathrm{inv}}\cdot\dot{\boldsymbol{q}} \tag{4}$$

式中：$\dot{\boldsymbol{q}}=\begin{bmatrix}\dot{q}_{11} & \dot{q}_{12} & \dot{q}_{13} & \dot{q}_{14} & \dot{q}_{15} & \dot{q}_{16}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}_{1\times6}$；

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{dir}}=\begin{bmatrix}\$_{a1}\\ \vdots\\ \$_{6n}\end{bmatrix}_{6\times1}=\begin{bmatrix}La_1 & \cdots & Ra_1\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ La_6 & \cdots & Ra_6\end{bmatrix}_{6\times6};$$

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{inv}}=\begin{bmatrix}\$_{\mathrm{a}1}\cdot(\boldsymbol{\Pi}\,\$_{11}) & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & \$_{\mathrm{a}6}\cdot(\boldsymbol{\Pi}\,\$_{16})\end{bmatrix}_{6\times6}。$$

式中：$\boldsymbol{J}_{\mathrm{dir}}$ 为机构正雅可比矩阵；$\boldsymbol{J}_{\mathrm{inv}}$ 为机构逆雅可比矩阵（对角矩阵）。很明显 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{inv}}$ 是对角矩阵，若其可逆，则将式（4）可写为：

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{inv}}^{-}\cdot\boldsymbol{J}_{\mathrm{dir}}\cdot(\boldsymbol{\Pi}\,\boldsymbol{v})=\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}} \tag{5}$$

由于 $\boldsymbol{J}_{\text{inv}}$ 是对角矩阵，它的逆依然是对角矩阵，其元素是原对角矩阵的倒数。

$$\boldsymbol{J}_{\text{inv}}^{-}\cdot\boldsymbol{J}_{\text{dir}}=\begin{bmatrix}\dfrac{\$_{\text{a}1}\cdot(\boldsymbol{\Pi}\,\$_{11})}{g_1} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & \cdots & \dfrac{\$_{\text{a}6}\cdot(\boldsymbol{\Pi}\,\$_{16})}{g_6}\end{bmatrix} \tag{6}$$

式中：g_i 为逆雅可比矩阵第 i 行元素的倒数。机构动平台输出的广义速度 $\boldsymbol{v}$ 的速度分量，ω_x，ω_y，ω_z 表示动平台角速度在定坐标系 X，Y，Z 轴线上的分量。动平台姿态一般使用 zyz 欧拉角，或者修正的 zyz 欧拉角$-T$ 和 T 角，或者 RPY(Roll, Pitch, Yaw 即翻滚、俯仰、偏航)来描述，值得注意的是欧拉角都是参考动坐标系。需要建立定坐标系角速度分量 ω_x，ω_y，ω_z 与动平台在动坐标系姿态角速度之间的关系。以 $\boldsymbol{R}_{3\times3}$ 表示动平台相对于定平台的姿态变换矩阵。

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}={}_{\text{B}}^{\text{A}}\dot{\boldsymbol{R}}\cdot{}_{\text{B}}^{\text{A}}\boldsymbol{R}^{\text{T}} \tag{7}$$

式中：$\hat{\boldsymbol{\omega}}=\begin{bmatrix}0 & -\omega_z & \omega_y\\ \omega_z & 0 & -\omega_x\\ -\omega_y & \omega_x & 0\end{bmatrix}$，使用 xyz 欧拉角来表示姿态变换矩阵 $\boldsymbol{R}$。

$${}_{B}^{A}\boldsymbol{R}=rot\left[x,\alpha\right]rot\left[y,\beta\right]rot\left[z,\gamma\right] \tag{8}$$

式中：$rot[\ ]$为转动矩阵；x，y，z 为动平台动坐标系中的轴线；α，β，γ 表为动平台坐标系相对固定坐标系轴线相应的转角。由于 $\text{R}_x\text{P}_z\text{R}_y$ 型并联机构动平台 xyz 欧拉角中 γ=0，因而可由式（8）得到：

$$\begin{aligned}&{}_{\text{B}}^{\text{A}}\boldsymbol{R}=rot\left[x,\alpha\right]rot\left[y,\beta\right]rot\left[z,0\right]=\\&\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha\\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\beta & 0 & \sin\beta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta\end{bmatrix}=\\&\begin{bmatrix}\cos\beta & 0 & \sin\beta\\ \sin\alpha\cdot\sin\beta & \cos\alpha & -\sin\alpha\cdot\cos\beta\\ -\cos\alpha\cdot\sin\beta & \sin\alpha & \cos\alpha\cdot\cos\beta\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{9}$$

$\dot{\boldsymbol{R}}$ 是位姿变换矩阵 $\boldsymbol{R}$ 关于时间 t 进行求导得到的。根据式（7—9）可以得到关系式：

$$\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix}=\boldsymbol{D}\begin{bmatrix}\dot{\alpha}\\ \dot{\beta}\\ \dot{\gamma}\end{bmatrix} \tag{10}$$

因为 $\text{R}_x\text{P}_z\text{R}_y$ 型 2R1T 并联机构动平台的 xyz 欧拉角中 γ=0，因而式（10）中 $\boldsymbol{D}$ 可化简为：

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & 0\\ 0 & \sin\alpha & 0\end{bmatrix} \tag{11}$$

1.2 算例

2R 解耦并联机构见图 2，该机构通过 3 条支链将静平台与动平台连接而成。第 1 条运动链为{-U_1-}，第 2 条运动链为{-R_2($\perp P_3$)∥U_4-}，第 3 条运动链为{-S_5-P_6-S_7-}，该机构的详细情况参见文献[5]。

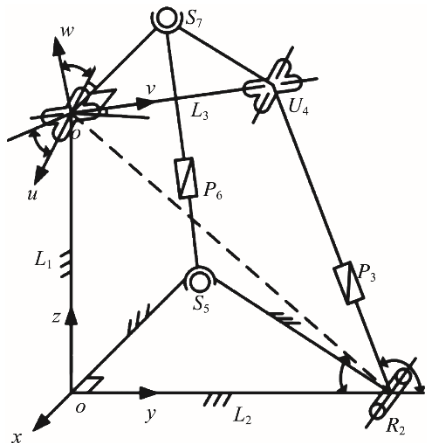

图 2　解耦的 2R 并联机构

Fig.2 Decoupled 2R parallel mechanism

运动链 S_5S_7，R_2U_4 产生的驱动旋量都是力旋量，力旋量沿着矢量 $\boldsymbol{S_5S_7}$，$\boldsymbol{R_2U_4}$ 的方向，根据静、动平台的尺寸、运动副坐标和动静平台的位姿变换矩阵，运动链 R_2U_4 产生的驱动力的方向可由式（12）进行计算。

$$\begin{aligned}&{}^{\text{B}}\boldsymbol{oU}_4=\begin{bmatrix}0 & L_3 & 0 & 1\end{bmatrix}^{\text{T}}\\&{}_{\text{B}}^{\text{A}}\boldsymbol{T}\,{}^{\text{B}}\boldsymbol{oU}_4=\begin{bmatrix}0 & \cos\alpha\cdot L_3 & \sin\alpha\cdot L_3+L_1 & 0\end{bmatrix}^{\text{T}}\\&{}^{\text{A}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{U}_4=\begin{bmatrix}0 & \cos\alpha\cdot L_3-L_2 & \text{s}\alpha\cdot L_3+L_1\end{bmatrix}^{\text{T}}\\&{}_{\text{B}}^{\text{A}}\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}\cos\beta & 0 & \sin\beta & 0\\ \sin\alpha\cdot\sin\beta & \cos\alpha & -\sin\alpha\cdot\cos\beta & 0\\ -\cos\alpha\cdot\sin\beta & \sin\alpha & \cos\alpha\cdot\cos\beta & L_1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{12}$$

式中：${}^{\text{B}}\boldsymbol{oU}_4$ 为万向铰 U_4 在动平台坐标系 $ouvw$ 中的齐次位置向量；${}_{\text{B}}^{\text{A}}\boldsymbol{T}$ 为动平台坐标系到定坐标系 $Oxyz$ 的齐次变换矩阵。运动链 R_2U_4 产生的驱动力的位置矢量为：

$${}^{A}\boldsymbol{oU}_4={}_{B}^{A}\boldsymbol{T}\cdot{}^{B}\boldsymbol{oU}_4\begin{bmatrix}0 & \cos\alpha\cdot L_3 & \sin\alpha\cdot L_3\end{bmatrix}^{\text{T}} \tag{13}$$

可得到运动链 R_2U_4 的驱动力旋量：

$$\begin{aligned}&\$_{\text{a}1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{U}_4 & {}^{\text{A}}\boldsymbol{oU}_4\times\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{U}_4\end{bmatrix}^{\text{T}}=\\&\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{U}_4, L_2L_3\sin\alpha+L_1L_3\cos\alpha & 0 & 0\end{bmatrix}^{\text{T}}\end{aligned} \tag{14}$$

运动链 S_5S_7 产生的驱动力的驱动力旋量可由式（15）进行计算。式（15—20）中，用 s_α 表示 $\sin\alpha$，s_β 表示 $\sin\beta$，c_α 表示 $\cos\alpha$，c_β 表示 $\cos\beta$。

$$\begin{aligned}&{}^{\text{B}}\boldsymbol{oS}_7=\begin{bmatrix}-L_3 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^{\text{T}}\\&{}_{\text{B}}^{\text{A}}\boldsymbol{T}\,{}^{\text{B}}\boldsymbol{oS}_7=\begin{bmatrix}-L_3\cdot\text{c}_\beta & -L_3\cdot\text{s}_\alpha\cdot\text{s}_\beta & L_3\cdot\text{c}_\alpha\cdot\text{s}_\beta+L_1 & 0\end{bmatrix}^{\text{T}}\\&{}^{\text{A}}\boldsymbol{S}_5\boldsymbol{S}_7=\begin{bmatrix}-L_3\cdot\text{c}_\beta+\text{L}_2 & -L_3\cdot\text{s}_\alpha\cdot\text{s}_\beta & L_3\cdot\text{c}_\alpha\cdot\text{s}_\beta+L_1\end{bmatrix}^{\text{T}}\end{aligned} \tag{15}$$

运动链 S_5S_7 产生的驱动力的位置矢量为：

$$ {}^{A}\boldsymbol{oS}_7=\left[-L_3c_\beta \quad -L_3s_\alpha s_\beta \quad L_3c_\alpha s_\beta\right]^{T} \tag{16}$$

可得到支链 S_5S_7 的驱动力旋量：

$$\$_{a2}=\left[\boldsymbol{S}_5\boldsymbol{S}_7,\ -L_1L_3s_\alpha s_\beta \quad L_2L_3c_\alpha s_\beta+L_1L_3c_\beta \quad L_2L_3s_\alpha s_\beta\right] \tag{17}$$

结合式(14)，式(17)得到：

$$\begin{bmatrix}\$_{a1}\\ \$_{a2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{U}_2 & L_2L_3s_\alpha+L_1L_3c_\alpha & 0 & 0\\ \boldsymbol{S}_5\boldsymbol{S}_7 & -L_1L_3s_\alpha s_\beta & L_2L_3c_\alpha s_\beta+L_1L_3c_\beta & L_2L_3s_\alpha s_\beta\end{bmatrix} \tag{18}$$

由于图 2 所示机构动平台的输出为转动，则动平台正雅克比矩阵，根据式(10)，式(11)得到关于欧拉角 α，β 的表达式：

$$\boldsymbol{J}_{dir}\cdot\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}L_2L_3s_\alpha+L_1L_3c_\alpha & 0 & 0\\ -L_1L_3s_\alpha s_\beta & L_2L_3s_\beta+L_1L_3c_\beta c_\alpha & 0\end{bmatrix}\cdot$$

$$\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}L_2L_3s_\alpha+L_1L_3c_\alpha & 0 & 0\\ -L_1L_3s_\alpha s_\beta & L_2L_3s_\beta+L_1L_3c_\beta c_\alpha & 0\end{bmatrix}\cdot$$

$$\boldsymbol{D}\begin{bmatrix}\dot\alpha\\ \dot\beta\\ \dot\gamma\end{bmatrix} \tag{19}$$

得到关于输出欧拉角 α，β 的正雅克比矩阵为：

$$\boldsymbol{J}_{dir}=\begin{bmatrix}L_2L_3s_\alpha+L_1L_3c_\alpha & 0 & 0\\ -L_1L_3s_\alpha s_\beta & L_2L_3s_\beta+L_1L_3c_\beta c_\alpha & 0\end{bmatrix} \tag{20}$$

式（20）与文献[5]使用该机构位移方程得到的机构运动雅可比矩阵一致，从而验证了 1.1 节中使用旋量理论，建立的输入变量与输出角速度在定坐标系分量的表达式，变换为输入变量与输出欧拉角速度分量表达式方法的正确性。一些文献判断多转动自由度机构输入输出解耦性是，经常需要通过对位移方程进行判断，可以发现，1.1 节提出的方法只需要对使用旋量理论建立的输入输出方法进行变换即可判断，计算过程的变量物理意义明确，计算方法较为简单直观。

2　$R_xP_zR_y$ 型 2R1T 并联机构支链综合

2.1　部分解耦的输入-输出关系分析

根据 1.1 节的结果，可以得到 $R_xP_zR_y$ 型并联机构的输入-输出关系。根据 $R_xP_zR_y$ 型 2R1T 并联机构的动平台的运动模式，可知当动平台绕 x 轴转动后，移动副的方向随之发生改变，将会产生在 yOz 平面的移动分量，并且 y 轴的转轴也会发生改变，轴向与 yOz 平面平行，动平台始终在 x 轴方向没有移动分量，因而可得到，$R_xP_zR_y$ 型并联机构动平台的运动旋量为：

$$\boldsymbol{v}_p=\left[\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z \quad v_y \quad v_z\right]^{T}_{1\times5} \tag{21}$$

$R_xP_{yz}R_y$ 并联机构的输入-输出关系矩阵应为式 (22)。

$$\boldsymbol{J}_{inv}^{-}\cdot\boldsymbol{J}_{dir}=\begin{bmatrix}\frac{M_{a_1}}{g_1} & \frac{N_{a_1}}{g_1} & \frac{P_{a_1}}{g_1} & \frac{Q_{a_1}}{g_1} & \frac{R_{a_1}}{g_1}\\ \frac{M_{a_2}}{g_2} & \frac{N_{a_2}}{g_2} & \frac{P_{a_2}}{g_2} & \frac{Q_{a_2}}{g_2} & \frac{R_{a_2}}{g_2}\\ \frac{M_{a_3}}{g_3} & \frac{N_{a_3}}{g_3} & \frac{P_{a_3}}{g_3} & \frac{Q_{a_3}}{g_3} & \frac{R_{a_3}}{g_3}\end{bmatrix}_{3\times5} \tag{22}$$

由于式（22）中的 3×5 的矩阵不是方阵，因而不能使用 1.1 节中的结论得到完全解耦并联机构的输入-输出关系矩阵。$R_xP_zR_y$ 型并联机构移动副 P_z 和转动副 R_y 的运动轴线都与转动副 R_x 的转角有关，根据机构运动输入-输出解耦性可知，$R_xP_{yz}R_y$ 型并联机构输入-输出只能可能有 2 种情况：不存在解耦性；存在部分解耦性。$R_xP_zR_y$ 型并联机构的运动输入-输出不存在完全解耦性。$R_xP_zR_y$ 型并联机构的运动输入-输出部分解耦时，解耦的程度最大的输入-输出关系只能见式（23）[13]。

$$M_{pa}=\begin{bmatrix}0 & y(q_1,\ q_2) & z(q_1,\ q_2)\\ \alpha(q_1) & \beta(q_3) & 0\end{bmatrix} \tag{23}$$

式中：M_{pa} 为动平台的方位变量；y，z 为动坐标系原点在定坐标系的位置变量；α，β 为动平台相对于动平台坐标系关于 xyz 欧拉角的转角（α，β）；q_i 为第 i 个运动输入变量，从机构的 $R_xP_zR_y$ 运动模式可知，动平台位置坐标 y，z 与绕 R_x 运动副的转角、P_z 运动副的移动有关，相应的驱动副变量为 q_2，q_1。

根据式（22—23）可知，$R_xP_zR_y$ 型并联机构运动输入-输出转角解耦时，输入-输出关系矩阵应为式（24）。

$$J_{inv}^{-}\cdot J_{dir}=\begin{bmatrix}\frac{M_{a_1}}{g_1} & \frac{N_{a_1}}{g_1} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{P_{a_2}}{g_2} & \frac{Q_{a_2}}{g_2} & \frac{R_{a_2}}{g_2}\\ 0 & 0 & \frac{P_{a_3}}{g_3} & \frac{Q_{a_3}}{g_3} & \frac{R_{a_3}}{g_3}\end{bmatrix}_{3\times5} \tag{24}$$

根据式（5—6）可知，式（24）中的右下 2×3 分块矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与动平台的 xyz 欧拉角 α，β 的解耦性相关，其表达式为：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\frac{P_{a_2}}{g_2} & \frac{Q_{a_2}}{g_2} & \frac{R_{a_2}}{g_2}\\ \frac{P_{a_3}}{g_3} & \frac{Q_{a_3}}{g_3} & \frac{R_{a_3}}{g_3}\end{bmatrix}_{2\times3} \tag{25}$$

根据式（10—11）得到：

$$
\boldsymbol{AD}=\begin{bmatrix} \dfrac{P_{a_2}}{g_2} & \dfrac{Q_{a_2}}{g_2} & \dfrac{R_{a_2}}{g_2} \\ \dfrac{P_{a_3}}{g_3} & \dfrac{Q_{a_3}}{g_3} & \dfrac{R_{a_3}}{g_3} \end{bmatrix}_{2\times32\times3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & 0 \end{bmatrix} = \tag{26}
$$

$$
\begin{bmatrix} \dfrac{P_{a_2}}{g_2} & \dfrac{Q_{a_2}\cdot\cos\alpha}{g_2}+\dfrac{R_{a_2}\cdot\sin\alpha}{g_2} & 0 \\ \dfrac{P_{a_3}}{g_3} & \dfrac{Q_{a_3}\cdot\cos\alpha}{g_3}+\dfrac{R_{a_3}\cdot\sin\alpha}{g_3} & 0 \end{bmatrix}_{2\times3}
$$

根据式（4）可知：

$$
\boldsymbol{\Pi}\,\boldsymbol{v}_p=\begin{bmatrix} v_y & v_z & \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}_{1\times5} \tag{27}
$$

动平台的 xyz 欧拉角 α，β 完全解耦时式（26）中的 2×3 矩阵中的元素需满足条件：

$$
\begin{aligned} &\frac{Q_{a_2}}{g_2}=\frac{R_{a_2}}{g_2}=\frac{P_{a_3}}{g_3}=0 \\ &P_{a_2}\neq 0 \end{aligned} \tag{28}
$$

且 Q_{a_3}，R_{a_3} 不能同时为 0，因而根据式（26），式（28），$R_xP_zR_y$ 型并联机构的运动输入-输出部分解耦时，动平台移动与转动解耦，2 个转动自由度完全解耦，即解耦度最大时得到：

$$
\boldsymbol{J}_{\mathrm{inv}}^{-}\cdot\boldsymbol{J}_{\mathrm{dir}}=\begin{bmatrix} \dfrac{M_{a_1}}{g_1} & \dfrac{N_{a_1}}{g_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{P_{a_2}}{g_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{Q_{a_3}}{g_3} & \dfrac{R_{a_3}}{g_3} \end{bmatrix}_{3\times5} \tag{29}
$$

由式（29）可知，运动链 1 施加在动平台上的驱动力为沿 YOZ 平面的力旋量，运动链 2 施加在动平台上一个沿 X 轴的力偶旋量，运动链 3 施加在动平台上一个沿 YOZ 平面的力偶旋量。根据使用综合旋量的方法可知，运动链中除了驱动副的运动副都与驱动旋量的互易积为 0，且驱动副与驱动旋量的互易积不为 0，在确保运动链中运动副不存在冗余的情况下，可得到运动链的结构。

2.2　支链 1 结构综合

首先对第 1 条分支进行综合，产生移动分量的驱动螺旋可表示为：

$$
\boldsymbol{S}_{a_1}=\begin{bmatrix} 0 & M_{a_1} & N_{a_1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{30}
$$

支链 1 中的驱动副是个移动副时，驱动副 i 对应的运动旋量为：

$$
\boldsymbol{S}_{1i}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & Q_1 & R_1 \end{bmatrix} \tag{31}
$$

支链 1 中的驱动副是个转动副时，驱动副 i 对应的运动旋量为：

$$
\boldsymbol{S}_{1i}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & Q_1 & R_1 \end{bmatrix} \tag{32}
$$

如果支链 1 中的驱动副为转动副，则转动副位于与定平台相连的，x 轴方向的转动副之后，由于驱动电机跟随着机构运动，使机构的动力学性能变差，因而舍去。则机构支链 1 中的驱动副可为移动副。根据 RPR 型并联机构的运动模式，移动副的移动方向由动平台绕固定坐标系 x 轴的转角决定。支链 1 的结构应满足以下几个条件。

1）支链中移动副之前应串联一个沿动平台 x 轴方向的转轴。

2）其后应串联一个沿动平台 y 轴方向的转轴。

3）支链中除驱动副之外的运动副旋量应和式（30）所表示驱动旋量互易。

2.3　支链 2 结构综合

从式（29）的结果可以知道，产生定平台 x 轴角速度分量的驱动螺旋为：

$$
\boldsymbol{S}_{a_2}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & P_{a_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{33}
$$

支链 2 中的驱动副 j 对应的运动旋量为：

$$
\boldsymbol{S}_{2j}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & P_2 & Q_2 & R_2 \end{bmatrix} \tag{34}
$$

由上式可知支链 2 中的驱动副是沿动平台 x 轴方向的转动副。支链 2 结构和支链 1 的结构相同，不同在于驱动副应为转动副，支链 1，2，3 运动的交集要符合动平台 RPR 的运动模式。

2.4　支链 3 结构综合

从式（29）的结果可以知道，使动平台产生 y，z 轴角速度分量的驱动螺旋为：

$$
\boldsymbol{S}_{a_3}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{a_3} & R_{a_3} \end{bmatrix} \tag{35}
$$

支链 3 中的驱动副 k 对应的运动旋量为：

$$
\boldsymbol{S}_{3k}=\begin{bmatrix} 0 & M_3 & N_3 & P_3 & Q_3 & R_3 \end{bmatrix} \tag{36}
$$

式中：转动 z 轴分量是由于动平台绕定平台 x 轴转动产生的，因而支链 3 的转动驱动副应位于绕定平台 x 轴转动副之后。支链 3 结构和支链 1 的结构相同，不同在于驱动副应为沿动平台 y 轴的转动副，支链 1，2，3 运动的交集要符合动平台 RPR 的运动模式。

3　$R_xP_zR_y$ 型并联机构运动解耦分析

3.1　$R_xP_zR_y$ 型并联机构结构

并联机构第 1 条运动链 A_1B_1 结构为 ${}^{x}R\underline{{}^{z}T}{}^{y}R$，第 2 条运动链 A_2B_2 结构为 $\underline{{}^{x}R}{}^{z}T{}^{y}R{}^{y}T$，第 3 条运动链 A_3B_3 结构为 ${}^{x}R\underline{{}^{y}R}{}^{z}R{}^{z}T{}^{x}T{}^{y}T$，机构简图见图 3。定坐标系为 XYZ，动坐标系为 $oxyz$，旋量 $\$_{12}$，$\$_{21}$，$\$_{32}$ 对应的运动副为驱动副。

3.2　自由度分析

支链 1 在坐标系 $OXYZ$ 下的约束反螺旋为：

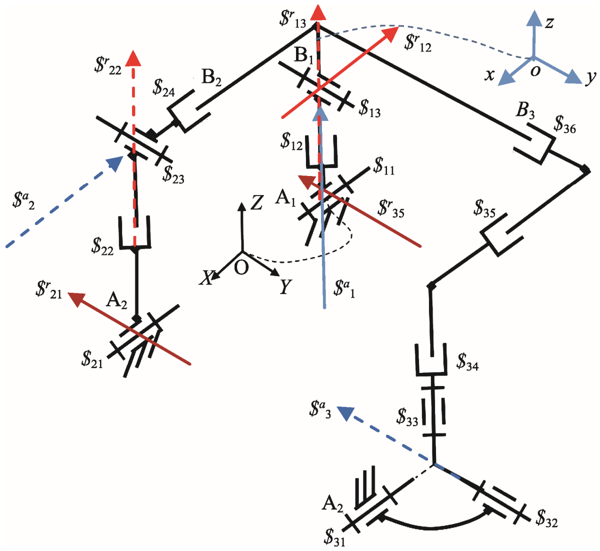

图 3　$R_xP_zR_y$ 型 2R1T 完全解耦并联机构简图
Fig.3 Schematic diagram of $R_xP_zR_y$ type 2R1T completely decoupled parallel mechanism

$\$_{11}{}^{r}=(0\ 1\ 0;0\ 0\ 0)$
$\$_{12}{}^{r}=(1\ 0\ 0;0\ a_1\ 0)$
$\$_{13}{}^{r}=(0\ 0\ 0;0\ 0\ 1)$　(37)

支链 2 在坐标系 $OXYZ$ 下下的约束反螺旋为：

$\$_{21}{}^{r}=(0\ 1\ 0;0\ a_2\ 0)$
$\$_{22}{}^{r}=(0\ 0\ 0;0\ 0\ 1)$　(38)

支链 3 不在动平台上施加约束螺旋。图 4 中动平台上所施加的 3 个力螺旋和 2 个力偶线性相关。动平台上施加的约束系存在冗余约束，即 $\upsilon=2$。

采用修正的 Kutzbach-Grübler 公式计算机构自由度：

$$M=6(n-g-1)+\sum f_i+\upsilon \tag{39}$$

式中：M 为机构的自由度；n 为机构构件总数；g 为机构的运动副数；f_i 为第 i 个运动副的自由度数；υ 冗余约束数。

$$M=6(12-13-1)+13+2=3 \tag{40}$$

图 3 中的动平台具有 3 个自由度，结合式(37—38)可知，动平台具有沿 X，Y 轴的 2 个移动自由度和绕平行与 Z 轴的 1 个转动自由度，即具有 $R_XT_ZR_Y$ 运动模式。可以验证，该机构 3 个自由度是全周的。

3.3　速度分析

设动平台先绕动平台坐标系 x 轴从图 3 所示并联机构初始位置转动角 α，再沿 z 轴移动 d，最后绕 y 轴转动 β，那么容易得到锁定驱动副 $\$_{12}$ 产生的驱动力旋量在定坐标系下为：

$$\$_{a1}=[0\quad -\sin\alpha\quad \cos\alpha\quad 0\quad 0\quad 0] \tag{41}$$

锁定驱动副 $\$_{21}$ 产生的驱动力旋量为：

$$\$_{a2}=[0\quad 0\quad 0\quad 1\quad 0\quad 0] \tag{42}$$

锁定驱动副 $\$_{32}$ 产生的驱动力旋量为：

$$\$_{a3}=[0\quad 0\quad 0\quad 0\quad \cos\alpha\quad \sin\alpha] \tag{43}$$

根据式（4）得到：

$$J_{\mathrm{dir}}=\begin{bmatrix}0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha\end{bmatrix}_{3\times6}$$

将式中矩阵的右下角 2×3 矩阵带入式(11)得到：

$$\boldsymbol{AD}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha\end{bmatrix}_{2\times3}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & 0\\ 0 & \sin\alpha & 0\end{bmatrix}_{3\times3}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}_{2\times3} \tag{44}$$

代入，得到：

$$J_{\mathrm{dir}}=\begin{bmatrix}0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}_{3\times6}$$

$$J_{\mathrm{dir}}\times\begin{bmatrix}0 & v_y & v_z & \omega_\alpha & \omega_\beta & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}_{6\times1}=J_{\mathrm{inv}}\begin{bmatrix}\dot q_1 & \dot q_2 & \dot q_3\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}_{3\times1} \tag{45}$$

由于 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{inv}}$ 是对角阵，因而式（45）可表明动平台的移动速度的大小只与驱动副的速度 $\dot q_1$ 有关，移动速度在定坐标系有 y,z 轴的分量；动平台 XYZ 欧拉角速度 ω_α，ω_β 之间是完全解耦的，分别只与驱动副 $\dot q_2$，$\dot q_3$ 有关。

4　结语

文中提出了对含有多个转动自由度的解耦并联机构的综合方法，使用该方法设计了解耦程度最大的 2R1T 新型并联机构，使用旋量理论对这种机构的自由度进行了验证。

使用旋量理论，分析了动平台角速度在定坐标系的分量与欧拉角的角速度之间的关系，建立了含有多个转动自由度并联机构输入-输出的关系，通过算例验证了这种方法的正确性，计算了一种新型 2R1T 部分解耦并联机构的运动部分解耦的运动特性。

参考文献：

[1] 刘伟，刘宏昭．具有 2T1R 与 2R1T 运动模式 3 自由度并联机构型综合[J]．农业机械学报，2018，49(7): 401—409.
LIU Wei, LIU Hong-zhao. Type Synthesis of 3-DOF Parallel Mechanism with 2T1R and 2R1T Motion Mode[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2018, 49(7): 401—409.

[2] 刘伟．5R 平面机构在不同装配、工作模式下的工作空间[J]．包装工程，2017, 38(5): 58—62.
LIU Wei. 5R Plane Mechanism Work Space in Different Assembly Modes and Work[J]. Packaging Engi-

neering, 2017, 38(5): 58—62.

[3] 刘伟, 曹亚斌, 张洪军, 等. 一种新型可重构 5R 机构的运动学分析[J]. 包装工程, 2018, 39(7): 157—161.
LIU Wei, CAO Ya-bin, ZHANG Hong-jun. Kinematics Analysis of a New Reconfigurable 5R Mechanism[J]. Packaging Engineering, 2018, 39(7): 157—161.

[4] 曾达幸, 王华明, 樊明洲, 等. 3 自由度转动广义解耦并联机构构型综合[J]. 机械工程学报, 2017, 53(3): 17—24.
ZENG Da-xing, WANG Hua-ming, FAN Ming-zhou, et al. Type Synthesis of Three Degrees of Freedom Rotational Generalized Decoupling Parallel Mechanism[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2017, 53(3): 17—24.

[5] 张彦斌, 吴鑫, 刘宏昭. 完全各向同性 2T1R 空间并联机器人机构型综合[J]. 农业机械学报, 2011, 42(11): 200—207.
ZHANG Yan-bin, WU Xin, LIU Hong-zhao, Structural Synthesis of Fully-isotropic 2T1R Spatial Parallel Robotic Manipulators[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2011, 42(11): 200—207.

[6] 张彦斌, 王慧萍, 吴鑫. 完全各向同性 3 自由度平面并联机构的型综合[J]. 光学精密工程. 2012, 20(3): 579—586.
ZHANG Yan-bin, WANG Hui-ping, WU Xin. Structure Synthesis of Fully-isotropic 3-DOF Planar Parallel Manipulators[J]. Optics and Precision Engineering, 2012, 20(3): 579—586.

[7] XIE Fu-gui, LIU Xin-jun, ZHENG You, et al. Type Synthesis of 2T1R-type Parallel Kinematic Mechanisms and the Application in Manufacturing[J]. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 2014, 30(1): 1—10.

[8] 范彩霞, 刘宏昭, 张彦斌, 等. 一种新型 2R 完全解耦并联机构的运动学和奇异性分析[J]. 中国机械工程, 2010, 21(11): 622—626.
FAN Cai-xia, LIU Hong-zhao, ZHANG Yan-bin, et al. Kinematics and Singularity Analysis of a Novel 2R Fully-decoupled Parallel Manipulator[J]. China Mechanical Engineering, 2010, 21(11): 622—626.

[9] 陈海, 曹毅, 秦友蕾. 无耦合完全各向同性 1T1R 并联机器人机构构型综合[J]. 中国机械工程, 2016, 27(5): 589—595.
CHEN Hai, CAO Yi, QIN You-lei. Type Synthesis of Fully-decoupled and Fully-isotropic 1T1R Parallel Robotic Manipulators[J]. China Mechanical Engineering, 2016, 27(5): 589—595.

[10] 曾达幸, 胡志涛, 侯雨雷, 等. 基于螺旋理论的两转一移解耦并联机构型综合[J]. 燕山大学学报, 2014, 38(1): 22—28.
ZENG Da-xing, HU Zhi-tao, HOU Yu-lei, et al. Type Synthesis of 2R1T Decoupled Parallel Mechanism based on Screw Theory[J]. Journal of Yanshan University, 2014, 38(1): 22—28.

[11] 窦玉超, 曾达幸, 李明洋, 等. 一种两转一移完全解耦并联机器人机构及其特性分析[J].中国机械工程, 2014, 25(2): 241—245.
DOU Yu-chao, ZENG Da-xing, LI Ming-yang, et al. Analysis of a 2T1R Fully Decoupled Parallel Robot Mechanism and its Characteristics[J]. China Mechanical Engineering, 2014, 25(2): 241—245.

[12] GOGU G. Structural Synthesis of Parallel Robots: Part 2: Translational Topologies with Two and Three Degrees of Freedom[M]. Berlin: Springer Netherlands, 2009: 421.

[13] LI Q, HERVE J M. Type Synthesis of 3-DOF RPR-Equivalent Parallel Mechanisms[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2014, 30(6): 1333—1343.

[14] 刘伟, 刘宏昭. 具有 2R1T 和 3R 运动模式的并联机构综合[J]. 机械工程学报, 2019, 55(3): 53—63.
LIU Wei, LIU Hong-zhao. Type Synthesis of 3-DOF Parallel Mechanism with both 2R1T and 3R Motion Mode[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2019, 55(3): 53—63.

[15] 张彦斌, 赵浥夫, 李跃松, 等. 无耦合空间移动并联机构型综合[J]. 农业机械学报, 2017, 48(1): 325—332.
ZHANG Yan-bin, ZHAO Yi-fu, LI Yue-song, et al. Structural Synthesis of Uncoupled Spatial Translational Parallel Mechanisms[J]. Transactions of The Chinese Society of Agricultural Machinery, 2017, 48(1): 325—332.