喷涂机悬臂梁的正弦激励参数振动分析

朱由锋,刘新华,王强,王子博

(山东科技大学 交通学院,青岛 266590)

摘要:目的 自动式喷涂机喷涂效率和质量较低与其在工作过程中受激产生振动密切相关,需要进行参数振动分析,以提高喷涂机系统的稳定性。方法 首先建立喷涂机力臂-喷枪系统的正弦激励悬臂梁的弯 扭耦合振动模型,对系统的参变方程进行有限差分离散处理,得到系统的质量和时变刚度矩阵,然后运 用时间离散和 Matlab 振动工具箱进行求解和分析。结果 喷涂机系统的固有频率随时间的变化情况近似 于正弦,且随着激励振幅和激励频率的增加都有趋于增大。当激励幅度大于3 cm 时,系统的振动幅值 会急剧增加,说明弯扭振动发散,系统趋于不稳定。当激励频率大于 150 rad/s 时为不稳定区域;激励 频率小于 150 rad/s 时系统的大部分区域趋于稳定;同时在激励频率等于 95 rad/s 附近系统不稳定。结论 喷涂机悬臂梁在不同激励参数条件下具有复杂的振动行为,研究其振动特性对提高自动式喷涂机的稳定 性和效率具有重要的指导意义。

关键词:喷涂机;悬臂梁;有限差分;参数振动;正弦激励 中图分类号:TB486 文献标识码:A 文章编号:1001-3563(2020)13-0223-08 DOI:10.19554/j.cnki.1001-3563.2020.13.032

Sine Excitation Parameter Vibration of Sprayer Cantilever Beam

ZHU You-feng, LIU Xin-hua, WANG Qiang, WANG Zi-bo

(College of Transportation, Shandong University of Science and Technology, Qingdao 266590, China)

ABSTRACT: The work aims to necessarily analyze the parameter vibration to improve the stability of the sprayer system as the problem of low spray efficiency and quality of the automatic sprayer is closely related to the vibration generated during the working process. Firstly, the bending-torsion coupled vibration model for the sine excitation cantilever beam of sprayer arm-spray gun system was established and the finite difference discretization of the system's parameter variation equation was conducted to obtain the mass and time-varying stiffness matrices of the system. Then, the time discretization and Matlab vibration toolbox was used for solution and analysis. The natural frequency of the sprayer system had a sinusoidal variation trend with the time, and it had a tendency to increase with the increase of excitation amplitude and frequency. When u>3 cm, the vibration amplitude of the system would increase sharply, indicating that the bending-torsion was divergent and the system tended to be unstable. When $\Omega>150$ rad/s, it was unstable; when $\Omega<150$ rad/s, most of the system tended to be stable, and the system was unstable near $\Omega=95$ rad/s. The sprayer cantilever beam has complex vibration behavior under different excitation parameters. It is of great significance to study its vibration characteristics for improving the stability and efficiency of the automatic sprayer.

KEY WORDS: sprayer; cantilever beam; finite difference; parameter vibration; sine excitation

基金项目:山东省重点研发计划(公益类科技攻关)(2019GGX103024)

作者简介:朱由锋(1976—),男,山东科技大学讲师,主要研究方向为车辆非线性振动、车载飞轮电池。

收稿日期: 2019-10-14

国内包装机械行业近年来已经取得长足进步,但 在包装效率和可靠性方面与国外差距依旧较大^[1]。国 内包装机械尚未制定严格的标准,零部件制造标准过 低导致性能不稳定^[2],包装机械生产过程中产生共振 运动,导致包装质量下降,可靠性变差。参数振动是 除自由振动、受迫振动和自激振动以外的又一种振动 形式,它由外界的激励产生,但激励不是以外力形式 施加于系统,而是通过系统内参数的周期性改变间接 地实现。参数振动在包装机械中普遍存在,如变长度 摆的运动、轴向周期力激励的直杆、非圆截面轴的横 向振动、电动机车传动轴的扭振等。Cusumano 和 Moon^[3]对正弦激励下矩形截面悬臂梁的非线性弯扭 耦合振动进行了分析研究。Branko 和 Milisavljevic^[4] 对末端集中载荷作用悬臂梁的变形和分叉进行了分 析。Zhang 等^[5]采用多尺度法^[6-7]对动态非线性振动 悬臂梁进行了研究,分析了2:1内共振,1/2次亚 谐共振,以及主共振时的全局分岔和混沌现象。马 成习^[8]利用 Pro/E 软件对包机槽轮机构进行了参数 化设计建模,运动仿真分析表明,提高了槽轮机构 的设计效率,为槽轮机构的数字化设计、加工提供 了理论依据。Bang^[9]对运用伽辽金法^[10]和多尺度法 对正弦激励悬臂梁进行了研究,并对其稳定性进行 了分析。丁毅^[11]应用 Adams 和 Pro/E 软件,对润滑 脂灌装机进行了联合仿真分析,提高了包装机械的 设计能力和质量。李云东^[12]对非线性弹性地基上悬 臂管道的参数振动进行了研究,对系统的分岔和混 沌现象进行了分析。汪峰^[13]考虑了温度和几何非线 性的影响建立了斜拉索的数学模型,利用多尺度法 对模型进行了分析。张薇^[14]根据齿轮的非线性阻尼 和刚度建立了直齿圆柱齿轮啮合藕合振动系统的参 数模型,利用多尺度法对系统的共振和亚谐共振进 行了研究。

文中采用有限差分离散方法,借助 Matlab 振动

工具箱,无需坐标变换使方程解耦,可以直接对一 般的非自治振动系统进行数值分析,得到固有频率 和振型的特性。另外,利用状态空间分析方法对多 自由度的参数振动系统的时域分析也具有通用性, 可以快速仿真各种激励条件下的振动位移响应和相 轨迹。

1 差分方程的建立

1.1 微分方程的建立

将自动式喷涂机的发动机、泵体、带轮、导轨、 散热系统等简化为定子部分,将力臂和喷枪部分简化 为悬臂梁,文中主要分析力臂和喷枪的受力振动情 况。则自动式高压喷涂机悬臂梁模型见图 1, $u(t)=u\cos(\Omega t)$ 是悬臂梁的激励,u和 Ω 分别表示激励的幅 度和频率。当激励的方向为垂直方向时,会引起绕 x轴的扭转变形,v(z,t)和 $\theta(z,t)$ 分别表示绕 x 轴的变形 量和绕 xy 平面的扭转变形量。

为了研究弯曲和扭转方向的运动,建立了弯扭 耦合运动的微分方程。方程中的耦合项来源于 *x* 方 向的力矩作用,可以通过(1-*z*)部分的自由体受力 图求解,力矩的产生是由于(1-*z*)部分的质量。根 据动量定理和牛顿第二定律,悬臂梁的弯扭耦合振 动微分方程为:

$$\begin{split} m\ddot{v} + EI_{y}v''' &- 0.5m(g - \ddot{u})[(l - z)^{2}\theta]'' = 0 \\ I\ddot{\theta} - GJ\theta'' + 0.5m(g - \ddot{u})[(l - z)^{2}v']' = 0 \\ \mathcal{H} 了方便差分计算, 转化为: \\ m\ddot{v} + EI_{y}v''' - 0.5m(g + u\Omega^{2}\cos\Omega t)[(l - z)^{2}\theta'' - 4(l - z)\theta' + 2\theta] = 0 \\ I\ddot{\theta} - GJ\theta'' + 0.5m(g + u\Omega^{2}\cos\Omega t)[(l - z)^{2}v'' - (2) \\ 2(l - z)v'] = 0 \end{split}$$





式中:m 为悬臂梁的线质量密度(kg/m);I 为悬 臂梁的线转动惯量(kg·m²);E 为悬臂梁的弹性模量 (Pa);G 为悬臂梁的剪切模量(Pa);I_y为悬臂梁 y 向的惯性矩(m⁴);J 为悬臂梁的极惯性矩(m⁴);l 为悬臂梁的长度(m)。

1.2 有限差分离散

喷涂机悬臂梁的边界条件为:

$$v''(L,t) = v'''(L,t) = v(0,t) = v'(0,t) = 0$$

$$\theta(0,t) = \theta'(0,t) = 0$$
(3)

根据一次差分公式和边界条件可以得到:

$$u_0' = \frac{1}{2h}(-u_{-1} + u_1) = 0$$

$$u_{-1} = u_1$$
(4)

根据二次、三次差分公式和边界条件:

$$u_{N}'' = \frac{1}{12h^{2}}(-u_{N-2} + 16u_{N-1} - 30u_{N} + 16u_{N+1} - u_{N+2}) = 0$$

$$u_{N}''' = \frac{1}{2h^{3}}(-u_{N-2} + 2u_{N-1} - 2u_{N+1} + u_{N+2}) = 0$$
 (5)

求解后得到:

$$u_{N+1} = \frac{1}{7} (u_{N-2} - 9u_{N-1} + 15u_N)$$

$$u_{N+2} = \frac{1}{7} (9u_{N-2} - 32u_{N-1} + 30u_N)$$
(6)

最后计算求出四阶导数的差分:

$$u_{1}^{""} = \frac{1}{h^{4}} (7u_{1} - 4u_{2} + u_{3})$$

$$u_{2}^{""} = \frac{1}{h^{4}} (-4u_{1} + 6u_{2} - 4u_{3} + u_{4})$$

$$u_{n}^{""} = \frac{1}{h^{4}} (u_{n-2} - 4u_{n-1} + 6u_{n} - 4u_{n+1} + u_{n+2}) \quad 3 \le n \le N - 2$$

$$u_{N-1}^{""} = \frac{1}{7h^{4}} (7u_{N-3} - 27u_{N-2} + 33u_{N-1} - 13u_{N})$$

$$u_{N}^{""} = \frac{12}{7h^{4}} (u_{N-2} - 2u_{N-1} + u_{N})$$
(7)

$$u_{1}' = \frac{1}{12h}(u_{1} + 8u_{2} - u_{3})$$

$$u_{2}' = \frac{1}{12h}(-8u_{1} + 8u_{3} - u_{4})$$

$$u_{n}' = \frac{1}{12h}(u_{n-2} - 8u_{n-1} + 8u_{n+1} - u_{n+2}) \quad 3 \le n \le N-2 \quad (8)$$

$$u_{N-1}' = \frac{1}{84h}(7u_{N-3} - 57u_{N-2} + 9u_{N-1} + 41u_{N})$$

$$u_{N}' = \frac{1}{84h}(6u_{N-2} - 96u_{N-1} + 90u_{N})$$
二阶导数的差分为:

$$u_{1}'' = \frac{1}{12h^{2}}(-3lu_{1} + 16u_{2} - u_{3})$$

$$u_{2}'' = \frac{1}{12h^{2}}(16u_{1} - 30u_{2} + 16u_{3} - u_{4})$$

$$u_{n}'' = \frac{1}{12h^{2}}(-u_{n-2} + 16u_{n-1} - 30u_{n} + 16u_{n+1} - u_{n+2}) \quad 3 \le n \le N - 2$$

$$u_{N-1}'' = \frac{1}{84h^{2}}(-7u_{N-3} + 11lu_{N-2} - 20lu_{N-1} + 97u_{N})$$

$$u_{N}'' = 0$$
(9)

根据扭转方向边界条件,可以得到一阶导数的差 分为:

$$\begin{aligned}
\theta_{1}' &= \frac{1}{2h} \theta_{2} \\
\theta_{n}' &= \frac{1}{2h} (-\theta_{n-1} + \theta_{n+1}) \quad 2 \leq n \leq N-1 \\
&= 0 \\
&= \text{INF} \text{ by by be here} \text{ by by here} \text{ boly here} \text{ b$$

2 喷涂机悬臂梁的固有频率

将差分公式代入微分方程中的微分项后,得到旋转梁的矩阵表达式:

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}(t)\boldsymbol{x} = 0 \tag{12}$$

式中: *M* 为 2*N*×2*N* 的质量矩阵; *K*(*t*)为 2*N*×2*N* 时变刚度矩阵,不能用传统方法进行求解,可以对刚 度矩阵进行时间离散,化为一般刚度矩阵,然后运用 Matlab 振动工具箱的 vtb4-3 进行求解; *x*=[v_1 , v_2 , $v_3...v_N$, θ_1 , θ_2 , $\theta_3...\theta_N$]。选择喷涂机旋转梁参数: *l*= 2 m, *m*=6.4 kg/m, *I*=13.3 kg·m², *E*=6.2 GPa, *G*=0.5 GPa, *I*_y=2.1 m⁴, *J*=4.2 m⁴, *g*=9.8。

当 *u*=0.1 cm, Ω=50 rad/s 时得到系统的前 3 阶固 有频率,见图 2,固有频率都随时间的变化曲线近似 于正弦函数,一阶固有频率的变化幅度较大,二、三 阶固有频率的变化较小。

由于固有频率的时变特性,直接求解固有频率随激励振幅和频率的变化曲线比较困难。可以分别求解 正弦激励的波峰和波谷位置固有频率变化曲线,其他 位置的固有频率都在两条曲线之间变化,可以近似得 到固有频率随激励振幅和频率的变化曲线。Ω=50 rad/s 时激励振幅与固有频率的关系曲线见图 3 μ=0.1 cm 时激励频率与固有频率的关系曲线见图 4,实线 表示波峰位置的变化曲线,虚线表示波谷位置的变化 曲线。从图 3 和图 4 中可以看出,固有频率随激励振



图 2 固有频率的时变特性 (u=0.1 cm , Ω =50 rad/s) Fig.2 Time-varying characteristics of natural frequency (u=0.1 cm, Ω =50 rad/s)

幅和频率的增加都有变大的趋势,一阶固有频率的变 化较大,二,三阶固有频率的变化较小,波峰位置的 固有频率要略大于波谷位置。

3 喷涂机悬臂梁的振动仿真

将差分公式代入式(1—2)中的微分项后,根据 差分结点的选择数目,对影响参数进行合成,最后可 得到正弦激励悬臂梁的表达式:



图 3 激振幅度对固有频率的影响(Ω =50 rad/s) Fig.3 Effect of the excitation amplitude on the natural frequency (Ω =50 rad/s)

$$\ddot{x}_{j} = X_{j}(x_{1}, x_{2}...x_{2N}, t) \quad j = 1, 2...2N$$

$$x = [v_{1}...v_{N}; \theta_{1}...\theta_{N}]$$
(13)

设定:
$$y_i = \dot{x}_i$$
 (14)

 $y_j = x_j$ (1 可以得到悬臂梁的状态方程:

$$\dot{y}_{j} = Y_{j}(y_{1}, y_{2}...y_{4N}, t) \quad (j = 1, 2...4N)$$

$$y = [v_{1}...v_{N}; \theta_{1}...\theta_{N}; \dot{v}_{1}...\dot{v}_{N}; \dot{\theta}_{1}...\dot{\theta}_{N}]$$
(15)

以状态变量为基,建立抽象的 4N 维空间称为状





 $A_{\rm m}$ ьò



态空间,相空间内的每个点与状态变量的每组值相对 应,称为相点,随着时间的推移,相点在相空间中位 置不断改变,描绘的曲线称为相轨迹。运用时间离散 和 Matlab 振动工具箱进行混合编程,可以对正弦激 励悬臂梁弯扭变形和相轨迹进行仿真。

以 $lgA_m = lg(max(abs(v_N)) + max(abs(\theta_N)) + 1)$ 为 纵 轴,激励振幅或者激励频率为横轴,可以得到激励振 幅和激励频率与弯扭振动幅度之间的关系曲线。 v_8 =-0.4803 cm, θ_8 =-0.0.3060 rad, Ω =50 rad/s 时的激 励振幅与振动幅度的关系曲线见图 5a。从图 5a 中看 出当 u>3 cm 时,振动幅度急剧增加,说明弯扭振动 发散,系统趋于不稳定区域。 $v_8 = -0.480 \text{ cm}$, $\theta_8 =$ -0.0.3060 rad, u=0.1 cm 时的激励频率与振动幅度的 关系曲线见图 5b。从图 5b 中可以看出, Ω>150 rad/s 时为不稳定区域。 Ω <150 rad/s 时系统的大部分区域 趋于稳定,只是在 $\Omega=95 \text{ rad/s}$ 附近不稳定,它恰好位 于一阶固有频率的2倍区域。

选择节点数 N=8,激励参数为 u=0.1 cm, $\Omega=50$ rad/s , 悬 臂 梁 末 端 位 移 的 初 始 条 件 选 择 为 : $v_8 = -0.4803$ cm, $\theta_8 = -0.0.3060$ rad, 其他节点的位移 初值根据主振型进行选取,以保证连续杆件位移的 连续性。仿真曲线见图 6。正弦激励悬臂梁末端弯曲 振动的时间位移曲线见图 6a,弯曲振动的相轨迹见 图 6b, 扭转振动的时间位移曲线见图 6c, 扭转振动 的相轨迹见图 6d。从图 6 中可以看出,正弦激励喷 涂机悬臂梁作稳态振动, 位移时间曲线具有明显的 周期性特征,是正弦激励作用的结果,振幅大小与 激励振幅有关,周期由激励频率决定。当 N=8, u=4 cm, Ω =50 rad/s, v_8 =-0.5134 cm, θ_8 =-0.2965 rad 时, 可以得到图 7,为系统的不稳定振动。当 N=8,u=0.1 cm , ${\it \Omega}{=}130~{\rm rad/s}$, $v_8{=}{-}0.4849~{\rm cm}$, $\theta_8{=}{-}0.3027~{\rm rad}$ 时,可以得到图8,悬臂梁末端振动位移不断增大, 为不稳定振动。



正弦激励悬臂梁的稳定性 图 5 Fig.5 Stability of sine excitation cantilever beam







图 8 悬臂梁末端的变形和相轨迹 (u=0.1 cm, $\Omega=130$ rad/s) Fig.8 Deformation and phase trajectory at the end of the cantilever beam (u=0.1 cm, $\Omega=130$ rad/s)

4 结语

文中运用有限差分离散、时间离散、Matlab 振动 工具箱和状态空间分析法,对喷涂机的正弦激励悬臂 梁的弯扭耦合的参数振动进行了仿真分析,求出典型 参数下固有频率的时变曲线,得到了激励振幅和激励 频率的变化量与固有频率的关系曲线。对激励振幅和 激励频率对系统稳定性的影响进行了分析,并分别求 得稳定振动和不稳定振动下的时间位移曲线和相轨 迹。借助于时间离散,将喷涂机喷枪的受迫振动、参 数振动等非自治系统进行了自治化处理,使得计算方 法更加多样化。以时间和空间离散为基础建立的状态 空间方程,借助于 Matlab 振动工具箱编程运算,可 以快速仿真各种激励条件下的振动位移和相轨迹,并 能根据振动幅度的大小判别系统的稳定性。振动分析 是控制施加的基础,对喷涂机喷涂精度和生产效率的 提高有重要的理论指导意义。

参考文献:

[1] 许德群,肖衡.我国包装与食品机械发展现状及趋势[J].包装与食品机械,2011,29(5):47—50.

XU De-qun, XIAO Heng. Development Status and Trend of Packaging and Food Machinery in China[J]. Packaging and Food Machinery, 2011, 29(5): 47—50.

- [2] 戴宏民. 中国包装机械的发展战略研究[J]. 包装工程, 2003, 24(3): 5—9.
 DAI Hong-min. Research on the Development Strategy of China Packaging Machinery[J]. Packaging Engineering, 2003, 24(3): 5—9.
- [3] CUSUMANO J P, MOON F C. Chaotic Non-planar Vibrations of the Thin Elastica, Part I: Experimental Observation of Planar Instability[J]. Journal of Sound and Vibration, 1995, 179(2): 85–208.
- [4] BRANKO M, MILISAVLJEVIC. On Lateral Buckling of a Slender Cantilever Beam[J]. International Journal of Solids Structures, 1995, 32(16): 2377–2391.
- [5] ZHANG WEI, WANG Feng-xia, YAO Ming-hui. Global Bifurcations and Chaotic Dynamics in Non-linear Non-planar Oscillations of a Parametrically Excited Cantilever Beam[J]. Nonlinear Dynamics, 2005, 40(3): 251–279.
- [6] BYUNG Y M, BEOM S K. Dynamic Analysis of Harmonically Excited Non-linear System Using Multiple Scales Method[J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2002, 16(6): 819–828.
- [7] NIU B, JIANG Wei-hua. Multiple Scales for Two-parameter Bifurcations in a Neutral Equation[J].

Nonlinear Dynamics, 2002, 70(1): 43—54.

- [8] 马成习.基于 Pro/E 的包机槽轮机构建模及运动仿真
 [J].包装工程, 2008, 29(2): 36—37.
 MA Cheng-xi. Modeling and Motion Simulation of Chartered Coil Mechanism Based on Pro/E[J]. Packaging Engineering, 2008, 29(2): 36—37.
- [9] BANG D J, JEONG T G. Perturbation Analysis of the Combination Resonances[C]// ICCSA 2008, Part I, LNCS 5072, Berlin, 2008: 576—586.
- [10] HUANG J L, SU R K L. Nonlinear Vibration of a Curved Beam under Uniform Base Harmonic Excitation with Quadratic and Cubic Nonlinearities[J]. Journal of Sound and Vibraton, 2011, 330(21): 5151— 5164.
- [11] 丁毅, 贾向丽, 李国志. 基于 ADAMS 的润滑脂灌装 机的设计[J]. 包装与食品机械, 2007(6): 41—43.
 DING Yi, JIA Xiang-li, LI Guo-zhi. Design of Grease Filling Machine Based on ADAMS[J]. Packaging and Food Machinery, 2007(6): 41—43.

- [12] 李云东,杨诩仁,文华斌.非线性弹性地基上悬臂管 道的参数振动[J].振动与冲击,2016,35(24):14—17.
 LI Yun-dong, YANG Xu-ren, WEN Hua-bin. Parametric Vibration of Cantilevered Pipe on Nonlinear Elastic Foundation[J]. Vibration and shock, 2016, 35(24): 14—17.
- [13] 汪峰,陈福青,文晓旭,等.考虑温度影响的斜拉索参数振动模型及响应分析[J].重庆交通大学学报(自然科学版),2016,35(2):1—5.
 WANG Feng, CHEN Fu-qing,WEN Xiao-xu, et.al. Vibration Model and Response Analysis of Cable Parameters Considering Temperature Influence[J]. Journal of Chongqing Jiaotong University(Natural Science Edition), 2016, 35(2):1—5.
- [14] 张薇,丁千.直齿圆柱齿轮啮合藕合振动系统参数 振动研究[J]. 工程力学, 2015, 32(5): 213—210.
 ZHANG Wei, DING Qian. Research on Parameter Vibration of Meshing Coupling Vibration System of Spur Gear[J]. Engineering Mechanics, 2015, 32(5): 213—210.