

含线性阻尼的正切型包装系统跌落冲击响应 分析的 NHB 法

仲晨, 秦清海, 赵冬菁
(曲阜师范大学, 山东 日照 276800)

摘要: **目的** 以含线性阻尼的正切型缓冲包装系统为研究对象, 利用 NHB 方法求解系统跌落冲击的逼近解析解。**方法** 首先建立系统的跌落冲击动力学方程; 其次引入无量纲位移与时间参数, 并经线性化处理, 应用 NHB 法得到系统响应的逼近解析解; 然后进一步得出系统跌落冲击时, 最大位移、峰值加速度及持续时间表达式; 最后利用实例对比明确提案算法的计算精度。**结果** 提案的 NHB 法与 R-K 法数值解的对比结果表明, 提案法所得位移及加速度的相对误差平均值均控制在 6% 以内。阻尼系数对系统响应影响显著, 当阻尼系数越大, 峰值位移就越小, 系统的峰值时间和振动频率也会相应减小。**结论** NHB 法适用于含线性阻尼的正切型包装系统跌落冲击的求解问题。

关键词: 非线性系统; NHB; 正切; 阻尼; 跌落冲击

中图分类号: TB485.3 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-3563(2020)23-0109-06

DOI: 10.19554/j.cnki.1001-3563.2020.23.016

NHB Method for Analyzing Drop Shock Response of Tangent Packaging System with Linear Damping

ZHONG Chen, QIN Qing-hai, ZHAO Dong-jing

(Qufu Normal University, Rizhao 276800, China)

ABSTRACT: The work aims to propose an approximate analytical solution for the drop shock system by using the NHB method with the tangent packaging system with linear damping as the research object. Firstly, the drop impact dynamics equation of the system was established. Secondly, the dimensionless parameters-displacement and time-were introduced. Afterwards, the approximate analytical solution of the system response was obtained by using the NHB method after linearization. Thirdly, the expressions of the maximum displacement, peak acceleration and duration were further obtained. Finally, the calculation accuracy of the proposed algorithm was confirmed by case study. The comparison between the proposed NHB method and the R-K method showed that the average value of relative errors of displacement and acceleration obtained by the proposed method was controlled within 6%. The damping coefficient significantly affected the response of the system. Following the increase of the damping coefficient, the peak displacement decreased. Meanwhile, the peak time and oscillation frequency of the system decreased to some extent. The NHB method is suitable for solving the drop shock response of tangent packaging system with linear damping.

KEY WORDS: nonlinear system; NHB; tangent; damping; drop shock

收稿日期: 2020-05-01

基金项目: 山东省自然科学基金面上项目 (ZR201702100113)

作者简介: 仲晨 (1979—), 男, 博士, 曲阜师范大学副教授, 主要研究方向为运输包装、包装结构设计。

产品在流通环节会普遍承受较大冲击加速度,有时甚至高达数百个 $g^{[1-2]}$ 。若包装不当,产品会因外部动力学激励而破损,而冲击是造成产品破损的重要原因之一。加强对运输包装耦合系统的响应分析研究,有助于减少因包装不当而造成的经济损失,这对包装技术的发展具有重要意义。

大量实验表明,常用包装缓冲材料的载荷与变形量关系呈非线性特性。非线性系统的分析较线性系统复杂许多,到目前还没有统一处理的有效数学工具。近年来,龙格-库塔法(Runge-kutta method, R-K)^[3-4]、变分迭代法^[5-8]、同伦摄动法^[9-10]、能量平衡法^[11-12]等方法被广泛应用于非线性包装系统问题的求解,尤其是 R-K 法在运输包装领域应用最为广泛。目前的研究也存在一些局限,如变分迭代法需要建立迭代关系并对过程进行控制,同伦摄动法对初始猜测值要求较高等。牛顿谐波平衡法(Newton-harmonic balancing method, NHB)将牛顿线性化方法与谐波平衡法^[13-14]有机结合起来,该法源于求解非线性振动问题,经初始条件改变后可用于产品跌落问题的求解^[15-16]。牛顿谐波平衡法不依赖小参数,针对强非线性问题可获得较高精度^[17-18]。常用包装缓冲材料除具有非线性特性之外,还具有典型阻尼特征,故笔者针对考虑线性阻尼的非线性系统,基于 NHB 法对其进行跌落冲击过程的响应分析,以进一步扩展运输包装算法理论。

1 系统的模型与动力学表达式

运输包装系统视为单自由度(Single degree of freedom, SDOF)含线性阻尼的正切型缓冲包装系统,首先获取包装系统在跌落冲击下的响应解析表达式。

正切型包装材料的载荷-变形曲线见图 1,其弹性力 F 与变形 x 的表达式见式(1)。

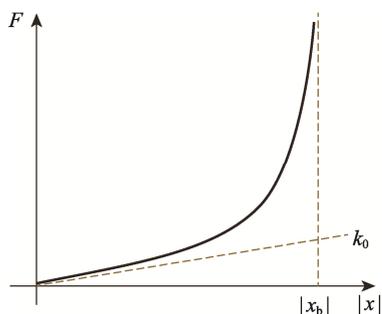


图 1 正切型缓冲材料载荷-变形量曲线
Fig.1 Load-deformation curve of cushioning materials with tangent characteristics

$$F(x) = \frac{2k_0x_b}{\pi} \tan \frac{\pi x}{2x_b} \quad (1)$$

单自由度含线性阻尼的正切型包装系统在跌落冲击状态的力学模型可简化,见图 2,此时冲击动力

学方程见式(2)。

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \frac{2k_0x_b}{\pi} \tan \frac{\pi x}{2x_b} = 0 \quad (2)$$

给定初始条件见式(3)。

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = \sqrt{2gH} \quad (3)$$

式中: k_0 为缓冲材料的初始弹性系数; x_b 为材料的压缩极限位移; m 为产品质量; g 为重力加速度,取 9.8 m/s^2 ; c 为阻尼系数; H 为包装件的初始跌落高度。

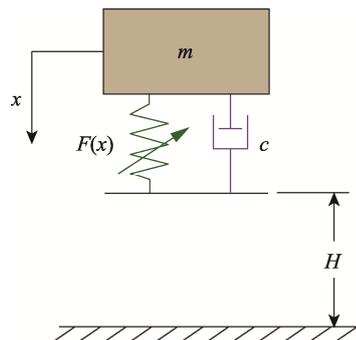


图 2 单自由度含线性阻尼的正切型包装系统跌落冲击模型

Fig.2 Drop impact model of sDOF tangent packaging system with linear damping

引入参量 $L_0 = 2x_b/\pi$, $T = (m/k_0)^{1/2}$ 及无量纲位移参数 $\delta = x/L_0$, 时间参数 $\tau = t/T$, 则式(2)和式(3)经变换后的无量纲动力学方程及初始条件分别见式(4—5)。

$$\ddot{\delta} + 2\mu\dot{\delta} + \tan \delta = 0 \quad (4)$$

$$\delta(0) = 0, \quad \dot{\delta}(0) = \sqrt{2gHmk_0}/(2k_0x_b) \quad (5)$$

式中: $2\mu = c/m$, μ 为衰减系数。

进一步将 $\tan \delta$ 展开为泰勒级数,并略去高于五阶小量,则式(4)可改写为式(6)。

$$\ddot{\delta} + 2\mu\dot{\delta} + \delta + \frac{1}{3}\delta^3 + \frac{2}{15}\delta^5 = 0 \quad (6)$$

2 基于 NHB 法的近似解

引入新变量 $\tau_1 = \omega\tau$, 相应所研究包装系统的动力学方程式(6)变为式(7)。

$$\omega^2 \frac{d^2\delta}{d\tau_1^2} + 2\mu\omega \frac{d\delta}{d\tau_1} + \delta + \frac{1}{3}\delta^3 + \frac{2}{15}\delta^5 = 0 \quad (7)$$

应用牛顿线性化步骤,位移和频率分别在 δ_1, ω_1 处展开为式(8)和式(9)。

$$\delta = \delta_1 + \Delta\delta_1 \quad (8)$$

$$\omega^2 = (\omega_1 + \Delta\omega_1)^2 = \omega_1^2 + 2\omega_1\Delta\omega_1 + (\Delta\omega_1)^2, \quad \omega = \omega_1 + \Delta\omega_1 \quad (9)$$

将式(8)及式(9)一并代入式(7),略去高阶小量,可得式(10)。

$$\begin{aligned} & \left[\omega_1^2 + 2\omega_1 \Delta\omega_1 + (\Delta\omega_1)^2 \right] \frac{d^2 \delta_1}{d\tau_1^2} + \omega_1^2 \frac{d^2 \Delta\delta_1}{d\tau_1^2} + \\ & 2\mu \left[(\omega_1 + \Delta\omega_1) \frac{d\delta_1}{d\tau_1} + \omega_1 \frac{d\Delta\delta_1}{d\tau_1} \right] + \\ & \delta_1 + \frac{1}{3} \delta_1^3 + \frac{2}{15} \delta_1^5 + \left(1 + \delta_1^2 + \frac{2}{3} \delta_1^4 \right) \Delta\delta_1 = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

为满足式 (6) 所示的微分方程，初始逼近解可选用式 (11) 或式 (12)。

$$\delta_1 = X_c(\tau_1) \cos \tau_1 + X_s(\tau_1) \sin \tau_1 \quad (11)$$

$$\delta_1 = X(\tau_1) \sin[\tau_1 + \varphi(\tau_1)] \quad (12)$$

其中，

$$X_c(\tau_1) = X(\tau_1) \cos \varphi(\tau_1), X_s(\tau_1) = -X(\tau_1) \sin \varphi(\tau_1) \quad (13)$$

式中：\$X_c(\tau_1), X_s(\tau_1)\$ 为待定方程，由初始条件确定。

将式 (11) 和 (13) 均代入式 (10) 中，可得式 (14)。

$$\begin{aligned} & [\omega_1^2 + 2\omega_1 \Delta\omega_1 + (\Delta\omega_1)^2] [(2\dot{X}_s - X_c) \cos \tau_1 - \\ & (2\dot{X}_c + X_s) \sin \tau_1] + \omega_1^2 \frac{d^2 \Delta\delta_1}{d\tau_1^2} + \\ & 2\mu \left\{ (\omega_1 + \Delta\omega_1) [(X_c + X_s) \cos \tau_1 + (X_s - \right. \\ & \left. X_c) \sin \tau_1] + \omega_1 \frac{d\Delta\delta_1}{d\tau_1} \right\} + X \sin(\tau_1 + \varphi) + \\ & \frac{1}{3} X^3 \sin^3(\tau_1 + \varphi) + \frac{2}{15} X^5 \sin^5(\tau_1 + \varphi) + \\ & \left[1 + X^2 \sin^2(\tau_1 + \varphi) + \frac{2}{3} X^4 \sin^4(\tau_1 + \varphi) \right] \Delta\delta_1 = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

得到式 (15—16)。

$$\sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin(3x) \quad (15)$$

$$\sin^5 x = \frac{5}{8} \sin x - \frac{5}{16} \sin(3x) + \frac{1}{16} \sin(5x) \quad (16)$$

将式 (15—16) 带入式 (14)，经整理后可得式 (17)。

$$\begin{aligned} & [\omega_1^2 + 2\omega_1 \Delta\omega_1 + (\Delta\omega_1)^2] \{ [-2(X \sin \varphi + X \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}) - \\ & X \cos \varphi] \cos \tau_1 - [2(X \cos \varphi - X \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}) - \\ & X \sin \varphi] \sin \tau_1 \} + \omega_1^2 \frac{d^2 \Delta\delta_1}{d\tau_1^2} + 2\mu \left\{ (\omega_1 + \Delta\omega_1) [(X \cos \varphi - \right. \\ & \left. X \sin \varphi - X \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}) \cos \tau_1 - (X \sin \varphi + X \cos \varphi + \right. \\ & \left. X \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}) \sin \tau_1] + \omega_1 \frac{d\Delta\delta_1}{d\tau_1} \right\} + [1 + X^2 \sin^2(\tau_1 + \varphi) + \\ & \frac{2}{3} X^4 \sin^4(\tau_1 + \varphi)] \Delta\delta_1 + \left(X + \frac{X^3}{4} + \frac{X^5}{12} \right) \sin(\tau_1 + \varphi) + \\ & o(\dot{X}) = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

为获得一阶近似解，令 \$\Delta\delta_1=0, \Delta\omega_1=0\$，此时 \$2\omega_1 \Delta\omega_1 + (\Delta\omega_1)^2\$ 为无穷小量，故式 (9) 仅保留 \$\omega_1^2\$ 项，

一并可得式 (18)。

$$Q_c(\dot{X}, X, \dot{\varphi}, \varphi) \cos \tau_1 + Q_s(\dot{X}, X, \dot{\varphi}, \varphi) \sin \tau_1 = 0 \quad (18)$$

其中，

$$Q_c = \omega_1^2 [-2(X \sin \varphi + X \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}) - X \cos \varphi] + \left(X + \frac{X^3}{4} + \frac{X^5}{12} \right) \cos \varphi + 2\mu\omega_1(X \cos \varphi - X \sin \varphi - X \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}) \quad (19)$$

$$Q_s = -\omega_1^2 [2(X \cos \varphi - X \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}) - X \sin \varphi] - \left(X + \frac{X^3}{4} + \frac{X^5}{12} \right) \sin \varphi + 2\mu\omega_1(X \sin \varphi + X \cos \varphi + X \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}) \quad (20)$$

略去高阶小量，分别令 \$\cos \tau_1\$ 和 \$\sin \tau_1\$ 前的系数为 0，则基于 NHB 的一阶近似解见式 (21)。

$$x(t) = \frac{2\omega(\omega^2 + \mu^2) \sqrt{2gHmk_0}}{k_0 [1 - (\omega^2 + 2\mu^2)]} \cdot \exp(-\mu t) \cdot \sin \left[\frac{1 - (\omega^2 + 2\mu^2)}{2\omega(\omega^2 + \mu^2)} \sqrt{\frac{k_0}{m}} t \right] \quad (21)$$

为叙述方便，将式 (21) 中的分数部分简化为式 (22—23)。

$$A = \frac{2\omega(\omega^2 + \mu^2) \sqrt{2gHmk_0}}{k_0 [1 - (\omega^2 + 2\mu^2)]} \quad (22)$$

$$\Omega = \frac{1 - (\omega^2 + 2\mu^2)}{2\omega(\omega^2 + \mu^2)} \sqrt{\frac{k_0}{m}} \quad (23)$$

动力学表达式 (21) 的速度、位移的一阶解析解见式 (24—25)。

$$\dot{x} = -A\mu \cdot \exp(-\mu t) \cdot \sin(\Omega t) + A\Omega \cdot \exp(-\mu t) \cdot \cos(\Omega t) \quad (24)$$

$$\ddot{x} = A\mu^2 \cdot \exp(-\mu t) \cdot \sin(\Omega t) - 2A\mu\Omega \cdot \exp(-\mu t) \cdot \cos(\Omega t) - A\Omega^2 \cdot \exp(-\mu t) \cdot \sin(\Omega t) \quad (25)$$

跌落冲击持续时间见式 (26)。

$$t_c = \frac{\pi}{\Omega} = \frac{2\pi\omega(\omega^2 + \mu^2)}{1 - (\omega^2 + 2\mu^2)} \sqrt{\frac{m}{k_0}} \quad (26)$$

由极值原理及函数性质，可求得跌落冲击过程最大位移和最大加速度分别见式 (27—28)。

$$x_m = A \cdot \exp[-\mu \cdot \arctan(\Omega/\mu) \Omega^{-1}] \cdot \sin[\arctan(\Omega/\mu) \Omega^{-1}] \quad (27)$$

$$a_m = \exp(-\mu t_m) \{ [A\mu^2 - A\Omega^2] \sin(\Omega t_m) - 2A\mu\Omega \cdot \cos(\Omega t_m) \} \quad (28)$$

其中，

$$t_m = \left| \arctan \left(\frac{3A\mu^2 \Omega - A\Omega^3}{3A\mu\Omega^2 - A\mu^3} \right) \Omega^{-1} \right| \quad (29)$$

为求解未知参数 \$\omega\$，由初始条件及加速度表达式

(25) 可得式 (30)。

$$\mu\sqrt{2Hk_0}(\omega^2 + 1) = \sqrt{mg}(\omega^4 + \mu^2\omega^2) \quad (30)$$

对于确定系统, 当产品跌落高度 H 或初始速度 $x'(0)$ 给定时, 参数 ω 可由式 (30) 确定。

3 算例分析

3.1 NHB 解析解的精度

R-K 法是目前公认求解非线性系统数值解误差较小的一种方法, 是广大学者^[9,15-16]作为非线性包装系统解法的误差评价标准。为评价基于 NHB 法近似解的计算精度, 文中基于 R-K 法, 用四阶方法提供候选解, 五阶方法控制误差, 具有较高的误差分析精度。给定特定参数: $m=20 \text{ kg}$, $g=9.8 \text{ m/s}^2$, $H=0.6 \text{ m}$, $k_0=2.5 \times 10^5 \text{ N/m}$, $x_0=0.05 \text{ m}$, $c=1200 \text{ N}\cdot\text{s/m}$ 。应用 R-K 法和 NHB 法算得系统跌落冲击下的位移响应及加速度响应, 分别见图 3—4。

计算了位移以及加速度相对误差的统计学参数, 见表 1。同时, 取时间 8, 16, 24, 32, 40 ms, 分别定量分析了利用 R-K 法和 NHB 法获得的位移和加速度值以及相对误差, 分析结果见表 2。

由表 1 可知, 位移相对误差的平均值为 5.5889%,

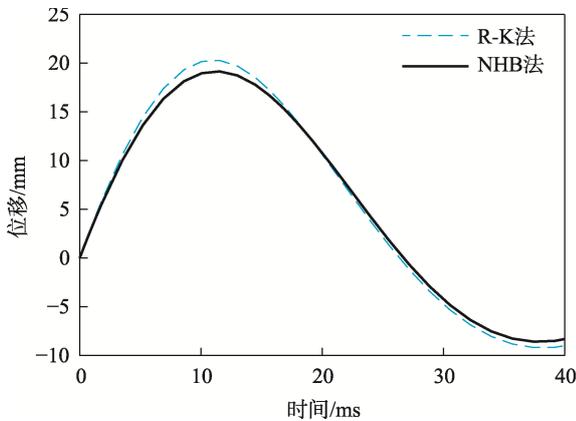


图 3 跌落冲击的位移响应对比
Fig.3 Comparison of displacement responses under drop impact

加速度相对误差的平均值为 5.6142%, 均小于 6%。由于逐次迭代导致的累次误差, 使得加速度的相对误差略高于前者。由表 2 可知, 加速度初始相对误差会较大 (约 15%), 这是由于系统振动频率存在偏差导致加速度峰值时间出现偏移所致。另外, 加速度相对误差峰值会提前于位移, 这表征了微分环节具有相位超前的特性, 与实际相符。

3.2 阻尼系数对系统动态过程的影响

进一步探究了阻尼系数 c 对非线性包装系统动态性能的影响。将 c 分别取 1000, 1400, 1800 $\text{N}\cdot\text{s/m}$, 此时系统的响应位移-时间曲线归纳见图 5。由图 5 可知, 峰值位移随阻尼系数的增大而减小; 且阻尼系数越大, 系统过渡过程越平稳, 超调量越小。同时可以看出, 伴随阻尼系数的增加, 系统的峰值时间和振动频率也会一定程度上减小。

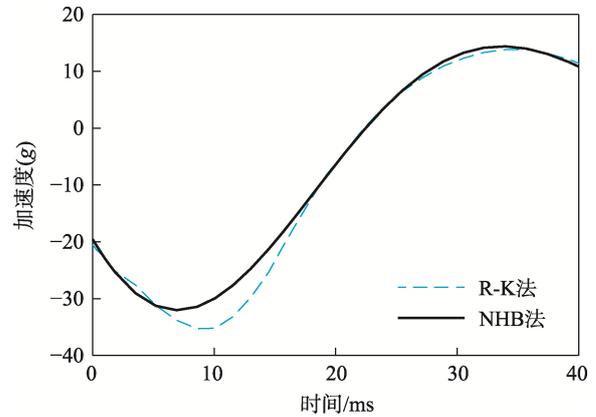


图 4 跌落冲击的加速度响应对比
Fig.4 Comparison of acceleration responses under drop impact

表 1 有关量的统计学参数
Tab.1 Statistical parameters of related physical quantity

参数	平均值/%	中位数/%	标准差/%
位移	5.5889	5.1141	3.1022
加速度	5.6142	4.4177	4.6041

表 2 基于时间的位移与加速度相对误差对比
Tab.2 Comparison of relative errors of displacement and acceleration based on time history

时间/ms	位移相对误差/%			加速度相对误差/%		
	NHB 法	R-K 法	相对误差	NHB 法	R-K 法	相对误差
8	0.0183	0.0193	6.09	-314.43	-353.00	14.92
16	0.0167	0.0172	3.14	-182.93	-208.00	8.43
24	0.0044	0.0039	11.69	33.92	25.60	2.41
32	-0.0063	0.0069	7.33	141.32	133.00	4.10
40	-0.0081	-0.0088	8.10	100.24	107.00	9.53

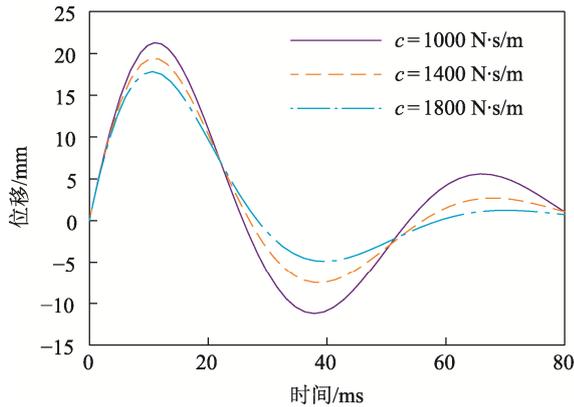


图 5 不同阻尼系数下的位移-时间曲线
Fig.5 Displacement-time curves with varied damping coefficients

为更进一步探究阻尼系数对系统振动频率的影响,将 c 分别取 600, 1200, 1800, 2400, 3000 N·s/m, 此时系统的振动频率随阻尼系数变化曲线见图 6。由图 6 可知,在一定范围内,系统振动频率会随阻尼系数的增加而减小,且阻尼系数越大,下降趋势越明显。笔者进一步计算了每 600 N·s/m 阻尼系数增量范围内 5 种情况 (Case1—Case5) 下系统振动频率 f_s 的变化量,见表 3。若以 Case1 为基准,则 Case2—Case5 的阻尼系数分别为 Case1 的 1~4 倍。整体上,Case5 的振动频率减少量约为 Case1 的 2 倍;分情况比较,

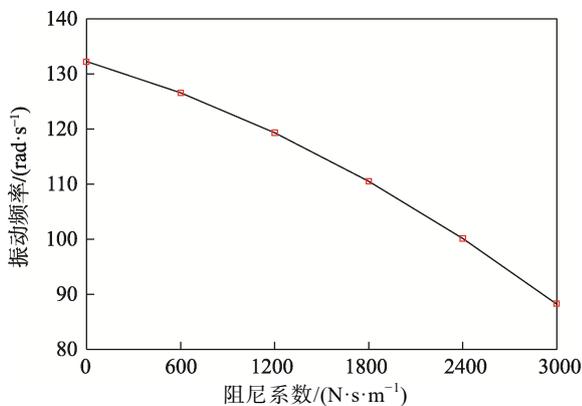


图 6 振动频率随阻尼系数的变化曲线
Fig.6 Variation curve of oscillation frequency with damping coefficient

表 3 不同阻尼系数范围的振动频率变化量
Tab.3 Variation of oscillation frequency with different damping coefficient ranges

类型	$c/((N \cdot s \cdot m^{-1}))$	f_s / Hz
Case1	0~600	-6.39
Case2	600~1200	-7.21
Case3	1200~1800	-8.26
Case4	1800~2400	-10.01
Case5	2400~3000	-12.89

Case2—Case5 较前一情况的振动频率变化量绝对值分别为 0.82, 1.05, 1.75, 2.88 Hz。经曲线拟合可知,阻尼系数增长倍率与振动频率变化量绝对值间存在指数相关(见图 7),关系式为 $y = 0.4951\exp(0.428x)$,相关系数为 0.9791。

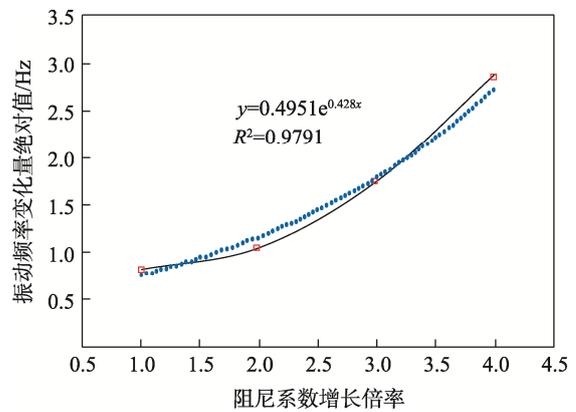


图 7 阻尼系数增长倍率与振动频率变化量绝对值的关系
Fig.7 Relationship between damping coefficient growth rate and absolute value of vibration frequency variation

4 结语

针对含线性阻尼的正切型包装系统,应用 NHB 法求解动力学方程。经无量纲化及线性化处理,最终获得系统跌落冲击位移、最大位移、峰值加速度以及持续时间的近似表达式。最后通过实例分析,将提案方法所计算结果与 R-K 法计算结果进行比较。结果表明,用 NHB 方法求解线性正切包装系统跌落动力学具有如下优点。

- 1) NHB 法将微分方程转化为代数方程,极大地简化了计算过程。
- 2) NHB 法不要求非线性方程包含小参数。
- 3) NHB 法可获得加速度等重要物理量的解析表达式,有利于构建系统的跌落破损评价方程。

参考文献:

[1] 高德. 包装应用力学[M]. 北京: 中国轻工业出版社, 2013: 74.
GAO De. Packaging Applied Mechanics[M]. Beijing: China Light Industry Press, 2013: 74.

[2] 田静敏, 黄秀玲. 包装件跌落冲击研究现状[J]. 包装工程, 2016, 37(11): 199—203.
TIAN Jing-min, HUANG Xiu-ling. Status of Package Dropping Impact Research[J]. Packaging Engineering, 2016, 37(11): 199—203.

[3] 王旭桐, 周辉, 马良, 等. 传输线方程的高精度龙格-库塔数值求解方法[J]. 强激光与粒子束, 2020, 32(3):

- 1—7.
WANG Xu-tong, ZHOU Hui, MANG Liang, et al. A High Accuracy Runge-kutta Method for Solving the Transmission Line Equation[J]. High Power Laser and Particle Beams, 2020, 32(3): 1—7.
- [4] 付裕. 基于龙格-库塔的非线性电容电路数值解法[J]. 山东工业技术, 2018(12): 182.
FU Yu. Numerical Solution of Nonlinear Capacitor Circuit Based on Runge-kutta[J]. Shandong Industrial Technology, 2018(12): 182.
- [5] 陈安军. 非线性包装系统跌落冲击问题变分迭代法[J]. 振动与冲击, 2013, 32(18): 105—107.
CHEN An-jun. Variational Iteration Method for Dropping Shock Problem of a Cubic Non-linear Packaging System[J]. Journal of Vibration and Shock, 2013, 32(18): 105—107.
- [6] HE J H, WU X H. Variational Iteration Method: New Development and Applications[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2007, 54(7/8): 881—894.
- [7] KAFASH B, RAFIEI Z, KARBASSI S. M, et al. A Computational Method Based on the Modification of the Variational Iteration Method for Determining the Solution of the Optimal Control Problems[J]. International Journal of Numerical Modelling Electronic Networks Devices and Fields, 2020(3): 2739.
- [8] 陈玲, 王琦, 汪圣祥. 非线性分段连续型延迟微分方程的变分迭代解法[J]. 湖北师范学院学报(自然科学版), 2017, 37(1): 27—34.
CHEN Ling, WANG Qi, WANG Sheng-xiang. Variational Iteration Method for Nonlinear Differential Equation with Piecewise Continuous Arguments[J]. Journal of Hubei Normal University (Natural Science Edition), 2017, 37(1): 27—34.
- [9] 李宏卫, 王军. 双曲正切型非线性包装系统跌落冲击响应分析的HAM及其修正[C]//第24届全国结构工程学术会议论文集(第I册), 2015: 509—514.
LI Hong-wei, WANG Jun. Correction of Homotopy Analysis Method for Dropping Shock Response of Hyperbolic Tangent Non-linear Packaging System[C]// Proceedings of the 24th National Academic Conference on Structural Engineering (Volume I), 2015: 509—514.
- [10] KHARRAT B. N, TOMA G. A New Hybrid Sumudu Transform with Homotopy Perturbation Method for Solving Boundary Value Problems[J]. Middle East Journal of Entific Research, 2020, 28(2): 142—149.
- [11] 李伟, 朱锡, 梅志远, 等. 能量平衡法在防弹性能估算中的应用研究[J]. 振动与冲击, 2009, 11(2): 191—194.
LI Wei, ZHU Xi, MEI Zhi-yuan, et al. Application of Energy Balance in Estimating Armor's Ballistic Resistance Performance[J]. Journal of Vibration and Shock, 2009, 11(2): 191—194.
- [12] 李银山, 李彤, 韦炳威, 等. 用谐波-能量平衡法求解单摆方程[J]. 动力学与控制学报, 2016, 14(3): 197—204.
LI Yin-shan, LI Tong, WEI Bing-wei, et al. Solution of Simple Pendulum Equation by Harmonic Something Energy Balance Method[J]. Journal of Dynamics and Control, 2016, 14(3): 197—204.
- [13] CHEN Y M, LIU Q X, LIU J K. Steady State Response Analysis for Fractional Dynamic Systems Based on Memory-free Principle and Harmonic Balancing[J]. International Journal of Non-linear Mechanics, 2016, 81(5): 154—164.
- [14] 柴振霞, 刘伟, 杨小亮, 等. 可变周期谐波平衡法求解周期性非定常涡脱落问题[J]. 物理学报, 2019, 68(12): 147—162.
CHAI Zhen-xia, LIU Wei, YANG Xiao-liang, et al. Application of Variable-time-period Harmonic Balance Method to Periodic Unsteady Vortex Shedding[J]. Acta Physical Sonica, 2019, 68(12): 147—162.
- [15] 杜兴丹, 陈安军. 非线性包装系统跌落冲击动力学响应分析的NHB方法[J]. 噪声与振动控制, 2018, 38(6): 48—51.
DU Xing-dan, CHEN An-jun. The NHB Method for Dropping Shock Dynamic Response Analysis in Non-linear Packaging Systems[J]. Noise of Vibration Control, 2018, 38(6): 48—51.
- [16] 赵晓兵, 杜兴丹, 陈安军. 正切型缓冲系统跌落冲击响应分析的NHB方法[J]. 包装工程, 2019, 40(7): 46—50.
ZHAO Xiao-bing, DU Xing-dan, CHEN An-jun. NHB Method for Analyzing Dropping Shock Response of Cushion Packaging System with Tangent Nonlinearity[J]. Packaging Engineering, 2019, 40(7): 46—50.
- [17] LAI S K, LIM C W, WU B S, et al. Newton-harmonic Balancing Approach for Accurate Solutions to Non-linear Cubic-quantic Duffing Oscillators[J]. Applied Mathematical Modelling, 2009, 33(2): 852—866.
- [18] WU B S, SUN W P, LIM C W. An Analytical Approximate Technique for a Class of Strongly Non-linear Oscillators[J]. International Journal of Non-linear Mechanics, 2006, 41(6/7): 766—774.