基于同伦延拓的冗余机械臂逆运动学优化算法研究

· 张国庆, 李宗道, 吴剑雄, 顾浩宇, 李清都^{*}

(上海理工大学,上海 200093)

摘要:目的 针对偏置冗余机械臂的逆运动学,采用传统数值法存在依赖初始值、奇异位姿收敛性差等问题,提出一种改进数值法。方法 首先将非线性方程组转化为同伦方程组,引入同伦延拓算法能够有效避免依赖初始值的问题,同时能够获取逆运动学解空间。然后考虑奇异位姿,将同伦方程组转化为最小二乘问题,采用 Levenberg Marquardt 算法对同伦方程组进行路径追踪,以获取逆运动学解空间。最后将关节极限避免问题映射为解空间优化问题,引入二进制改进粒子群优化算法,获得最优逆运动学解。 结果 实验结果表明,相较于传统数值法,文中所提数值法针对逆运动学求解具有更高的收敛率、更快的收敛速度,同时二进制改进粒子群算法能够有效避免关节极限问题。结论 采用文中所提数值法求解逆运动学的精度较高,能够满足实时性要求,对于机械臂用于包装作业具有一定的理论意义和工程应用价值。

关键词: 冗余机械臂; 逆运动学; Levenberg Marquardt; 同伦延拓; 二进制改进粒子群算法 中图分类号: TP241; TB486 文献标志码: A 文章编号: 1001-3563(2024)07-0197-08 DOI: 10.19554/j.cnki.1001-3563.2024.07.025

Inverse Kinematics Optimization Algorithm of Redundant Manipulator Based on Homotopy Continuation

ZHANG Guoqing, LI Zongdao, WU Jianxiong, GU Haoyu, LI Qingdu^{*}

(University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

ABSTRACT: The work aims to propose an improved numerical method to solve problems of dependence on the initial value and poor convergence of singular poses in the traditional numerical method in terms of complex inverse kinematics of the offset redundant manipulator. First, the nonlinear equations were transformed into homotopy equations. The introduction of homotopy continuation algorithm could effectively avoid the initial value dependence problem, and at the same time obtain the inverse kinematics solution space. Then taking the singular pose into account, the homotopy equations were transformed into a least squares problem, and the Levenberg Marquardt algorithm was used to track the path of the homotopy equations to obtain the inverse kinematics solution space. Finally, the joint limit avoidance problem was mapped to a solution space optimization problem, and the binary improved particle swarm optimization algorithm was introduced to obtain the optimal inverse kinematics solution. The experimental results showed that the numerical method proposed in this paper had a higher convergence rate and faster convergence speed for inverse kinematics than the traditional numerical method, and the binary improved particle swarm optimization algorithm could effectively avoid the joint limit problem. This numerical method has high accuracy in solving inverse kinematics and can meet real-time requirements, and has certain theoretical significance and engineering application value for the subsequent use of the

收稿日期: 2023-07-10

基金项目:国家自然科学基金(92048205)

manipulator in packaging operations.

KEY WORDS: redundant manipulator; inverse kinematics; Levenberg Marquardt; homotopy continuation; binary improved particle swarm algorithm

机器人技术广泛应用于包装行业,针对包装的不同类型(如产品装箱、分拣等),需要机械臂高速、高精度地操作,以提高其生产效率。冗余机械臂关节空间的维数大于任务空间的维数,导致七自由度机械 臂逆运动学欠约束^[1],增大了逆运动的复杂性。

许多学者已经提出了多种方法来解决冗余自由 度机械臂的逆运动学问题,其中包括基于位置的解析 法^[2]、基于智能优化算法求解和基于雅可比的数值 解。在 2007 年,Shimizu 等^[3]引入"臂角"的概念,并 作为参考平面来描述肘部的自运动特性,进而推导出 期望肘部位置时所有关节的表达式。基于位置的解析 方法对机械臂的几何构型提出了较高的要求,因此不 适用于带偏置结构的机械臂。

近年来,智能算法通过将机器人运动学方程转化 为最优控制问题进行求解。这类算法主要包含粒子群 优化算法(Partical Swarm Optimization, PSO)^[4]、遗 传算法(Genetic Algorithm, GA)^[5]、神经网络算法 (Neural Network Algorithm, NNA)^[6]和模拟退火算 法(Simulated Annealing Algorithm, SAA)^[7]。虽然优 化算法能够有效解决奇异位姿逆运动学问题,但复杂 的计算需要昂贵的时间成本,这不利于实时控制。

目前, 牛顿拉夫森法 (Newton Raphon, NR)^[8] 是最常见的数值求解方法,但是 NR 在以下 2 种情况 下会收敛失败:奇异位姿、初始点距离目标点过远。 房立金等^[9]采用线性插值方法,在每个插值点进行逆 运动学求解,逐步逼近目标点,但是未从根本上解决 问题。高斯牛顿法 (Gauss Newton Raphon, GNR)^[10] 通过最小二乘问题最小化,获取了误差最小的逆运动学 解。阻尼牛顿法(Damping Newton Raphon, DNR)^[11] 通过在每次迭代过程中引入一个阻尼因子,能够改善 DNR 中存在的发散和局部最小值问题,但却降低了 收敛速度。Levenberg Marquardt 算法^[12]结合了高斯牛 顿法和阻尼牛顿法的思想,提高了算法的稳定性。 Ananthanarayanan 等^[13]应用 Levenberg Marquardt 算 法找到逆运动学方程组的根,具有较好的稳定性。上 述数值法都不能有效避免对初始值的过度依赖性,其 收敛速度较慢,易出现不收敛问题,从而影响算法的 鲁棒性。

文中针对传统数值法对初始值敏感及冗余机械 臂逆运动学解空间等问题,将奇异性考虑在内,提出 一种改进的数值法,将 Levenberg Marquardt 算法与 同伦延拓算法融合,以获得逆运动学解空间,并且针 对关节极限规避问题进行优化处理。最后,对文中所 提逆运动学算法进行仿真验证,进一步探究机械臂在 包装自动化中的应用。

1 冗余机械臂运动链分析

采用带偏置七自由度机械臂,相应的 MDH 结构 和 MDH 参数如图 1、表 1 所示。



图 1 七自由度机械臂 MDH 结构 Fig.1 MDH structural diagram of 7-DOF manipulator

表 1 七自由度机械臂 MDH 参数 Tab.1 MDH parameters of the 7-DOF manipulator

关节 <i>i</i>	a_{i-1} /mm	$\alpha_{i-1}/(^{\circ})$	d _i /mm	$ heta_i/(^\circ)$	关节范围/(°)
1	0	180	-298.5	0	(-179, 179)
2	0	90	0	0	(-90, 90)
3	0	-90	-459.1	0	(-179, 179)
4	65	90	0	0	(0,175)
5	-52.8	-90	-457.4	0	(-179, 179)
6	0	-90	-5.0	180	(-179, 179)
7	77	-90	-105.9	0	(-179, 179)

根据 MDH 参数表, 计算得到机械臂相邻关节之间的齐次变换矩阵, 见式(1)。

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{i-1} T = R(x, a_{i-1}) T(x, \alpha_{i-1}) T(z, d_i) R(z, \theta_i) = \\ \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & a_{i-1} \\ \sin \theta_i \cos \alpha_{i-1} & \cos \theta_i \cos \alpha_{i-1} & -\sin \alpha_{i-1} & -\sin \alpha_{i-1} d_i \\ \sin \theta_i \sin \alpha_{i-1} & \cos \theta_i \sin \alpha_{i-1} & \cos \alpha_{i-1} & \cos \alpha_{i-1} d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
(1)

当各个关节角度已知时,得出各相邻关节之间的 齐次变换矩阵,将7个齐次变换矩阵相乘,得到机械 臂末端位姿相对于基座的齐次变换矩阵,见式(2)。

$${}^{0}_{7}T = {}^{0}_{1}T {}^{1}_{2}T {}^{2}_{3}T {}^{3}_{4}T {}^{4}_{5}T {}^{5}_{6}T {}^{6}_{7}T = \begin{pmatrix} {}^{0}_{7}R & {}^{0}_{7}P \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
(2)

式中: ${}_{7}^{0}R$ 、 ${}_{7}^{3}P$ 分别为机械臂末端相对于基座的 旋转分量和位置分量。

2 冗余机械臂逆运动学求解

同伦延拓算法(Homotopy Continuation Method, HCM)与传统的数值迭代法相比,具有不依赖初始 值、求解效率高、只需改变辅助同伦函数就能无发散 地求出方程所有解等优点^[14],因此将 Levenberg Marquardt(LM)算法与 HCM 相结合,以提高逆运 动学数值法的稳定性和收敛速度。

2.1 牛顿同伦延拓算法

七自由度机械臂的逆运动学数学模型是一个混 合三角函数多项式系统的高度非线性方程组,在满足 末端执行器位姿的情况下,为机械臂找到一组可行的 关节角度,具体方程组见式(3)。

$$F(x) = P_{d} - f(x) = 0$$
(3)

式中: x 为 7 个关节角度, $x = (\theta_1, \dots, \theta_7)$; f(x) 为机械臂正向运动学方程, $f(x) \in R^6$, 包含移动和旋转分量; P_d 为末端执行器期望位姿, $P_d \in R^6$ 。

常用的牛顿法求解该方程组的迭代见式(4)。

$$x_{k+1} = x_k - \frac{F(x_k)}{F'(x_k)}$$
(4)

式中: $F'(x_k)$ 表示方程的雅可比矩阵。HCM 通 过将原始的非线性方程组不断转化为参数化的连续函 数,最终以较简单的形式求得非线性方程组的解^[15], HCM 需要选择一个辅助同价函数^[16]。见式(5)。

$$G(x) = 0$$
 (5)

Wu^[17]详细介绍了辅助同伦函数的选择依据,将 同伦方程定义为式(6)。

$$H(x, t) = tF(x) + (1-t)G(x) = 0$$
(6)

式中: t 为从 0 到 1 不断变化的同伦参数,即 $t \in [0,1]$ 。同伦函数存在 2 个边界条件,见式 (7)。

$$\begin{cases} H(x, 0) = G(x) \\ H(x, 1) = F(x) \end{cases}$$

$$\tag{7}$$

算法目标是求解方程组 H(x,t)=0, 同伦方程的 求解由 t=0 出发, 趋向于 t=1, H(x, 1)=0, 即为 *F*(*x*)=0的解。同伦方程借助牛顿法将参数 *t* 从 0 变 化到 1 进行求解,见式(8)。

$$x_{k+1} = x_k - \frac{H(x, t)}{H'(x, t)}$$
(8)

基于牛顿法求解存在缺陷,当 H'(x,t)=0 或 H'(x,t)→0时,即雅克比矩阵奇异时,该算法不收敛, 因此基于牛顿法去解决同伦方程不能处理的机械臂 奇异位姿问题。为了使逆运动学数值算法在奇异位姿 处具有更高的稳定性,文中引入 Levenberg-Marquardt (LM)算法来校正同伦方程。

2.2 Levenberg-Marquardt 同伦延拓算法

Shafiee-Ashtiani 使用四阶同伦延拓算法,通过改 变辅助同伦函数解决并联机械臂正运动学多解问题, 并成功获取了全部 16 组正向运动学解。将奇异位姿 考虑在内,文中采用 LM 算法对同伦方程进行校正, 目的是避免传统数值法对初始值依赖的问题,且能够 获取逆运动学解空间。

当机械臂处于奇异位姿时,LM 算法通过添加阻 尼项,能够有效计算出逆运动学解,并且具有更快的 收敛性和鲁棒性。将式(3)表示为最小二乘最小化 问题,残差 *E* 的计算见式(9)。

$$E = \frac{1}{2} F^{\mathrm{T}} W_{\mathrm{E}} F \tag{9}$$

式中: $W_{\rm E} = \text{diag}\{w_{\rm E}, i\}, w_{\rm E}, i > 0$,表示加权矩阵,反映每个约束之间的优先级水平。为了简便计算, 文中取单位矩阵。对非线性方程(3)进行一阶泰勒 展开,见式(10)。

$$F(x+\delta) \approx F(x) - J(x)\delta$$
(10)
将式(10)帯入式(9),并添加阻尼项,可得式(11)。

$$E(x+\delta) \approx \frac{1}{2}F^{T}F - \delta^{T}J^{T}F + \frac{1}{2}\delta^{T}J^{T}J\delta + \frac{1}{2}\lambda\delta^{T}\delta$$
(11)

对 *E*(*x*+δ) 关于 δ 求偏导,并令一阶导数等于 0。 LM 算法基本迭代公式见式(12)。

$$(J^{\mathrm{T}}J + \lambda_k I)\delta_k = J^{\mathrm{T}}F \tag{12}$$

式中: J 为非线性方程 F(x) 的雅可比矩阵; J^{T} 为 雅可比矩阵的转置矩阵; λ_{k} 为阻尼因子; F 为非线性 方程组。进一步得到逆运动学迭代公式, 见式(13)。 $x_{k+1} = x_{k} + \delta_{k}$ (13)

选取阻尼因子 λ_k 是为了保证矩阵 $(J^TJ + \lambda_k I)$ 的正 定性。为了确保每次迭代过程中总能产生更好的步长 δ_k ,在迭代过程中需要不断选取阻尼因子。文献[18] 给出了阻尼因子选择公式,见式(14)。

$$\lambda_{k} = \begin{cases} \frac{\lambda_{k-1}}{\nu} & E(\frac{\lambda_{k-1}}{\nu}) \leq E_{k} \\ \lambda_{k-1} & E(\frac{\lambda_{k-1}}{\nu}) > E_{k} \coprod E(\lambda_{k-1}) \leq E_{k} \\ \lambda_{k-1}\nu^{w} & E(\frac{\lambda_{k-1}}{\nu}) > E_{k} \coprod E(\lambda_{k-1}) > E_{k} \end{cases}$$
(14)

式中: E_k 为第 k 步迭代的残差, $E_k = E(x_k)$; v为 缩放因子, 保证v > 1。阻尼因子在迭代过程中进行缩 放, 以确保非线性方程的值持续下降, 直到满足精度 要求。

传统 LM 算法迭代的初始猜测值 *x*_{init} 在 Levenberg-Marquardt 同伦延拓(LMHCM)算法中为起始值。 LMHCM 的迭代公式可以表示式(15)~(16)。

$$E(x,t) = \frac{1}{2} (tF(x) + (1-t)G(x)^{\mathrm{T}} W_{\mathrm{E}} (tF(x) + (1-t)G(x)) \quad (15)$$
$$x_{k+1} = x_{k} + \frac{J^{\mathrm{T}} E}{J^{\mathrm{T}} J + \lambda_{k} I} \quad (16)$$

3 关节极限规避

LMHCM 获取的逆运动学解空间为七维离散空间,为了在解空间中找到一组满足极限要求的最优解,将关节极限避免问题转化为最优问题。二进制粒子群优化算法(Binary Particle Swarm Optimization, BPSO)是求解二进制(离散)优化问题常用的群体智能算法之一,具有参数少、结构简单、执行速度快等特点^[19]。Liegeois^[20]利用机械臂的关节范围中心来优化关节运动,则任意关节的势函数见式(17)。

$$L(\theta_i) = \left(\frac{\theta_i - a_i}{a_i - \theta_{i\max}}\right) \quad i = 1, 2, \cdots, 7$$
(17)

式中: $a_i = [\theta_{imax} + \theta_{imin}]/2$; θ_{imin} 、 θ_{imax} 分别为 机械臂的关节下限和上限; $L(\theta_i)$ 为关节角度与关节 角度中心值的接近程度, $L \in [0,1]$, 函数 L 越趋于 0, 则表明关节角度越接近关节中心, 越趋于 1,则表明 关节角度越接近关节极限。由此将优化问题的适应度 函数 f(x)定义为式 (18)。

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} L(\theta_i) \tag{18}$$

为了平衡粒子群优化算法的局部搜索能力和全局 搜索能力,避免粒子群陷入局部最优,这里采用自适应 二进制改进粒子群(Self-Adaptive Binary Particle Swarm Optimization, SABPSO)算法。其中,惯性权重系数 ω 、 自我学习因子 c_1 和社会学习因子 c_2 的计算见式(19)。

式中: ω_{max} 、 ω_{min} 分别为惯性权重的最大值和最 小值; n_{iter} 为当前迭代次数; $n_{iter max}$ 为最大迭代次数, c_{1max} 、 c_{1min} 、 c_{2max} 、 c_{2min} 分别为自我学习因子和社 会学习因子的最大值和最小值。速度更新方式可表示 为式(20)。

$$v_{i,d}(t+1) = \omega v_{i,d}(t) + c_1 r_1 \Big[p_{ibest} - x_{i,d}(t) \Big] + c_2 r_2 \Big[p_{gbest} - x_{i,d}(t) \Big]$$
(20)

式中: $r_1 \ r_2$ 分别为 0~1 之间的随机数; $p_{i \text{ best}} \ p_{g \text{ best}}$ 分别为个体粒子最优解和全局粒子最优解。位置更新方式利用 Sigmoid 函数将粒子的速度映射到 0 和 1 之间, 进而表示第 i个粒子在第 d 维中的新位置,见式 (21)。

$$\begin{cases} S(v_{i,d}) = \frac{1}{1 + e^{-v_{i,d}}} \\ x_{i,d} = \begin{cases} 1 \quad \operatorname{rand}() < S(v_{i,d}) \\ 0 \quad \operatorname{rand}() \ge S(v_{i,d}) \end{cases} \end{cases}$$
(21)

4 实验仿真验证

为了验证文中所提逆运动学算法的有效性,以冗余 机械臂(图 1)为例进行仿真验证,其连杆参数和关节 运动范围如表1所示。实验基于 AMD R7-5800H 3.2 GHz CPU 的 Windows 系统下的 Matlab 2021a 进行。

4.1 逆运动学求解验证

在机械臂工作空间中,假设目标位置 ${}^{9}_{7}p = [-0.4579, 0.7157, 0.8460], 采用 zyz 欧拉角来描述目标姿态: [-2.2432, -1.1392, -2.1697], 对应的$ 齐次矩阵见式(22)。然后,通过提出的逆运动学算法来求解该目标姿态的解空间,具体求解过程:选择辅助同伦函数 <math>G(x),见式(23),迭代精度 $e = 1 \times 10^{-10}$, 缩放因子 v = 10,起始关节角度为初始状态。从 t = 0开始迭代,同伦参数步长为 0.1,将上一步计算的关 节角度作为下一次计算时的起始值,直到 t = 1,此时 计算得到最终解。

$${}_{7}^{0}T = \begin{pmatrix} -0.2605 & -0.9083 & 0.3273 & -0.4579 \\ -0.3273 & -0.2358 & -0.9150 & 0.7157 \\ 0.9083 & -0.3455 & -0.2358 & 0.8460 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
(22)
$$G(x) = F(x) - F(x_{0})$$
(23)

采用 Matlab 软件中的机器人工具箱(Robotic System Toolbox)进行仿真验证,机械臂目标位姿如图2所示。



采用文中所提的逆运动学算法 LMHCM 来求解 式(22),假设定义解空间维度为 10。10 组机械臂逆 运动学各个关节变量如表 2 所示。为了验证所提出逆 运动学方法的求解精度,将计算后得到的关节角度进 行正运动学求解,并记录误差,如图 3 所示。可以看 出,位置和方向的误差均保持在 10⁻⁶内,验证了所提 方法的有效性。

4.2 关节极限避免验证

为了验证所提关节极限避免算法的有效性,进行如下仿真。在仿真开始前,设置粒子群的数量为7, 最大学习因子均为1.5,最小学习因子均为0.5,最大 惯性权重为0.9,最小惯性权重为0.4,粒子的最大速 度为5,最小速度为-5,且将迭代步骤的数量设置为 50。研究的机械臂末端位姿见式(22),初始姿态为 机械臂起始关节角度。首先,通过逆运动学求得该目 标位姿对应的100组关节角度,然后根据机械臂的关节 极限(表1)及式(18)建立目标函数。通过式(20)~ (21)不断更新粒子的搜索方向及位置。

图 4 反映了 SABPSO 算法在搜索过程中目标函数的变化情况。当函数取值最小时,即为远离关节极限的最优关节角度。由图 4 可知,将文中所提的逆运动学求解方法 LMHCM 与 SABPSO 算法相结合,可以实现关节极限规避。

4.3 实验对比验证

为了验证文中所提算法 LMHCM 相较于传统 NR、LM 算法、NRHCM 的稳定性和收敛速度,在机 械臂工作空间范围内随机生成 100 组目标位姿和起 始关节角度,并进行逆运动学求解。选择辅助同伦函 数 G(x),见式(23), x_0 表示初始关节角,同伦参数 步长 t 为 0.1,迭代精度 $e=1\times10^{-10}$,最大迭代次数为 10,缩放因子 v=10。

从表 3 可以看出, 传统 NR、LM 算法求解逆运 动学的收敛能力分别仅有 37%、56%, 平均运行时间

表 2 逆运动学解 Tab.2 Inverse kinematics solution

组别	$ heta_1/(^\circ)$	$ heta_2/(^\circ)$	$ heta_3/(^\circ)$	$ heta_4/(^\circ)$	$ heta_5/(^\circ)$	$ heta_6/(^\circ)$	$ heta_7/(^\circ)$
1	37.298 8	-39.599 9	-132.278 9	48.630 2	-3.380 0	3.145 9	-4.801 9
2	38.203 1	-38.984 5	-133.138 7	48.516 1	5.161 4	3.046 4	-12.632 9
3	39.272 1	-38.341 3	-134.293 6	48.123 6	14.130 4	2.766 9	-20.728 1
4	40.279 1	-37.917 4	-135.658 7	47.506 4	21.015 0	2.335 7	-26.633 8
5	41.889 1	-37.183 1	-138.163 5	46.597 1	30.778 9	1.606 5	-34.674 0
6	44.477 9	-36.178 1	-142.955 8	45.243 3	42.945 5	0.279 2	-43.635 8
7	49.387 2	-34.741 8	-153.2933	43.430 6	59.089 1	-2.363 1	-53.024 9
8	37.583 6	-39.397 7	-132.545 0	48.621 9	-0.604 5	3.131 2	-7.351 0
9	48.628 4	-63.812 7	121.974 8	-18.454 0	74.880 8	-21.184 4	14.821 8
10	39.275 2	-38.339 5	-134.297 3	48.122 2	14.154 9	2.765 9	-20.749 8



Fig.3 Error curves of poses



图 4 适应度函数变化曲线 Fig.4 Variation curve of fitness function

表 3	4 种数值法实验效果对比					
Tab.3 Comparison of experimental results of four						
numerical methods						

算法	成功率/%	平均运行时间/s
NR	37	0.126 6
NRHCM	85	0.162 9
LM	56	0.139 5
LMHCM	97	0.041 4

需要 0.126 6、0.139 5 s。虽然 NRHCM 算法具有较高的收敛率,但仍无法处理奇异位姿下的逆运动学,且收敛速度相较于 NR、LM 算法更慢,不适于实时控制。文中提出的算法 LMHCM 的收敛能力达到了 97%,运行时间仅需 0.04 s 左右。可以得出结论,文中所提算法 LMHCM 相较于传统的数值法具有更高的收敛率和收敛速度。

为了验证文中所提 LMHCM 算法同伦路径追踪的效果,将非奇异位姿和奇异位姿分别与 NRHCM 算法进行对比,见式(24)。其中,在奇异位姿下,雅克比的秩 rank(*J*)=5。记录实验中同伦参数由0到1 迭代过程中每步的残差,如图 5~6 所示。









图 6 奇异位姿同伦路径追踪对比 Fig.6 Comparison of homotopy path tracking for singular pose

如图 5 所示,在非奇异位姿下,文中提出的算法 LMHCM 具有更好的收敛性和平滑性。如图 6 所示, 在奇异位姿下,采用 NRHCM 逆运动学求解会导致发 散,原因是不能计算得到雅克比的逆,而 LMHCM 能 够保持良好的收敛效果。

4.4 机械臂搬运应用案例

在实际工程应用中,常使用机械臂搬运产品线上的产品。文中提出的逆运动学算法可以更精确地计算出机械臂抓取产品各关节的角度,进而运动到产品位置进行搬运。文中设计了一个模拟产品线上机械臂抓起搬运的任务,机械臂需要将 A 点的产品经过 B 点运送到 C 点,最终回到起始位置。假设产品的位置 A、中间路径点 B 及终止点 C 的位姿信息已知,机械臂末端执行器抓取点的位姿如表 4 所示,位置坐标为[X, Y, Z],姿态坐标采用欧拉角描述为[R, P, Y]。根据文中所提 LMHCM 逆运动学算法计算上述各位姿的关节角度,结果见表 5。通过逆运动学计算得到 3 个路径点的关节角度后,在关节空间采用三次样条曲线进行轨迹规划,末端执行器运行轨迹如图 7 所示。经过仿真验证,机械臂能够以预定的运动精度完成待包装产品的抓取搬运工作。

表 4 抓取点位姿坐标 Tab.4 Pose coordinate of grabbing point

路径点	位置坐标/m	姿态坐标/(°)
A	(0.8, -0.2, 0.2)	(0, 0, 0)
В	(0, 0.5, 0.4)	(0, 0, 90)
С	(-0.7, 0.1, 0.6)	(0, 0, 0)

表 5	抓取点关节角度
Tab.5 Joint	s angles of grabbing point

			_				
路径点	$ heta_1/(^\circ)$	$ heta_2/(^\circ)$	$ heta_3/(^\circ)$	$ heta_4/(^\circ)$	$ heta_5/(^\circ)$	$ heta_6/(^\circ)$	$ heta_7/(^\circ)$
A	11.706 3	45.562 3	3.566 8	86.667 3	-3.336 3	-47.870 9	16.337 4
В	-48.911 3	-4.214 2	-39.822 4	133.365 1	-3.525 9	-49.927 4	3.614 1
С	-48.030 2	-50.230 4	-82.799 9	84.003 2	-50.610 8	-99.360 1	-138.062 8



图 7 末端执行器搬运轨迹 Fig.7 Transport trajectory of end-effector

5 结语

为了获得具有自运动特性和关节极限规避的带 偏置七自由度机械臂运动学逆解,提出了一种改进数 值求解方法。将 LM 算法与 HCM 相结合,不仅有效 避免了数值法对初始值敏感的问题,提高了数值法的 鲁棒性和收敛速度,而且利用同伦延拓算法能够获取 逆运动学解空间。同时,将避免关节极限映射为解空 间中关节角度的最优选择问题,建立适应度函数为优 化目标,利用 SABPSO 算法搜索出一组在关节极限 内的最优关节角度。仿真验证了所提出的逆运动学求 解空间方法及关节极限避免算法的正确性和可行性, 对于机械臂后续用于包装作业具有一定的理论意义 和工程应用价值。

参考文献:

- SHI X H, GUO Y, CHEN X C, et al. Kinematics and Singularity Analysis of a 7-DOF Redundant Manipulator[J]. Sensors, 2021, 21(21): 7257.
- [2] ZHANG Q. Robotics Mechanisms, Kinematics, Dynamics and Motion Planning[J]. 2019, 15(3): 125-141.
- [3] SHIMIZU M, KAKUYA H, YOON W K, et al. Analytical Inverse Kinematics for 7 DOF Redundant Manipulators with Joint Limits[J]. Journal of the Robotics Society of Japan, 2007, 25(4): 606-617.
- [4] 朱经纬,方虎生,邵发明,等. 自适应粒子群算法求 冗余机械臂逆运动学解[J]. 计算机工程与应用, 2019, 55(14): 215-220.
 ZHU Jing-wei, FANG Hu-sheng, SHAO Fa-ming, et al.

Self-Adaptive Particle Swarm Optimization Algorithm for Solving Inverse Kinematics Problem of Redundant Manipulator[J]. Computer Engineering and Applications, 2019, 55(14): 215-220.

- [5] 张立博,李宇鹏,朱德明,等.基于遗传算法的护理 机器人逆运动学求解方法[J].北京航空航天大学学 报,2022,48(10):1925-1932.
 ZHANG Li-bo, LI Yu-peng, ZHU De-ming, et al. Inverse Kinematic Solution of Nursing Robot Based on Genetic Algorithm[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2022, 48(10): 1925-1932.
- [6] GAO R H. Inverse Kinematics Solution of Robotics Based on Neural Network Algorithms[J]. Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing, 2020, 11(12): 6199-6209.
- [7] KÖKER R. A Neuro-Simulated Annealing Approach to the Inverse Kinematics Solution of Redundant Robotic Manipulators[J]. Engineering with Computers, 2013, 29(4): 507-515.
- [8] LEE S, LEE J, BANG J, et al. 7 DOF Manipulator Construction and Inverse Kinematics Calculation and Analysis Using Newton-Raphson Method[C]// 2021 18th International Conference on Ubiquitous Robots (UR). IEEE, 2021: 235-238.
- [9] 房立金,高瑞. 一般 6R 机器人逆运动学算法的改进[J]. 机械科学与技术, 2018, 37(9): 1325-1330.
 FANG Li-jin, GAO Rui. Improving Inverse Kinematics Algorithm for General 6-DOF Robots[J]. Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering, 2018, 37(9): 1325-1330.
- [10] XIE Y E, WU X D, SHI Z, et al. The Path Planning of Space Manipulator Based on Gauss–Newton Iteration Method[J]. Advances in Mechanical Engineering, 2017, 9(8): 168781401771847.
- [11] LIAO L C, CHEN W B, YAN D, et al. Solution of Inverse Kinematic Problem for Serial Robot Based on Screw Theory[C]// SPIE Smart Structures + Nondestructive Evaluation Proc SPIE 11376, Active and Passive Smart Structures and Integrated Systems XIV, 2020: 492-496.
- [12] WU L, YANG X D, MIAO D J, et al. Inverse Kinemat-

ics of a Class of 7R 6-DOF Robots with Non-Spherical Wrist[C]// 2013 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation, 2013: 69-74.

- [13] ANANTHANARAYANAN H, ORDÓÑEZ R. Real-Time Inverse Kinematics of (2n+1) DOF Hyper-Redundant Manipulator Arm via a Combined Numerical and Analytical Approach[J]. Mechanism and Machine Theory, 2015, 91: 209-226.
- [14] SHAFIEE-ASHTIANI M, YOUSEFI-KOMA A, IRAVANIMANESH S, et al. Kinematic Analysis of a 3-UPU Parallel Robot Using the Ostrowski-Homotopy Continuation[C]// 2016 24th Iranian Conference on Electrical Engineering (ICEE), 2016: 1306-1311.
- [15] LAFMEJANI A S, KALHOR A, MASOULEH M T. A New Development of Homotopy Continuation Method, Applied in Solving Nonlinear Kinematic System of Equations of Parallel Mechanisms[C]// 2015 3rd RSI International Conference on Robotics and Mechatronics

(ICROM), 2015: 737-742.

- [16] WU T M. Solving the Nonlinear Equations by the Newton-Homotopy Continuation Method with Adjustable Auxiliary Homotopy Function[J]. Applied Mathematics and Computation, 2006, 173(1): 383-388.
- [17] WU T M. A Study of Convergence on the Newton-Homotopy Continuation Method[J]. Applied Mathematics and Computation, 2005, 168(2): 1169-1174.
- [18] LOVE I B. Levenberg-Marquardt Algorithm in Robotic Controls[D]. Washington: University of Washington, 2020: 10-42.
- [19] BEHESHTI Z. A Time-Varying Mirrored S-Shaped Transfer Function for Binary Particle Swarm Optimization[J]. Information Sciences: an International Journal, 2020, 512(1): 1503-1542.
- [20] LIEGEOIS A. Automatic Supervisory Control of the Configuration and Behavior of Multibody Mechanisms[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 1977, 7(12): 868-871.